# I. MNOHOČLENY, LINEÁRNÍ ROVNICE

## 1. OPAKOVÁNÍ O MNOHOČLENECH ZE ZÁKLADNÍ DEVÍTILETÉ ŠKOLY

1. Ve městě jsou domy s různým počtem bytových jednotek. Je-li v městě $t$ domů s jedním bytem, $p$ domů s dvěma byty, $k$ s třemi byty, $m$ se čtyřmi byty, $v$ s pěti byty, $s$ se šesti byty a dva domy s osmi byty, kolik je ve městě bytových jednotek?

2. Traktorista oral v katastru farmy A $x$ dní po 10 hodinách a $y$ dní po 9 hodinách a v katastru farmy B $z$ dní po 8 hodinách a $v$ dní po 11 hodinách. Kolik hodin mu zbývá ještě odpracovat, jestliže plán orby činí celkem $m$ hodin?

3. Bednička s cukrem váží $r$ kp, prázdná $t$ kp. Kolik cukru je v $n$ takových bedničkách? Jestliže se účtuje $c$ Kčs za 1 kp cukru a $d$ Kčs za dovoz všech $n$ bedniček, na jakou částku zněl účet?

4. Malíř bílí místnost o délce $a$ metrů, šířce $b$ metrů a výšce $c$ metrů. Jakou plochu vybílí, má-li místnost dvoje dveře o rozměrech $x$ metrů a $y$ metrů a jedno okno o rozměrech $r$ metrů a $s$ metrů?

5. Šířka obdélníka je $(3m + 2n)$ cm, délka o $(m - n)$ cm větší. Jak velký je obvod obdélníka?

6. Jak velký obvod má trojúhelník, má-li jedna jeho strana délku $(m + n)$ cm, druhá strana je o $(n - 5)$ cm kratší než prvá a třetí strana o $(2m + 5)$ cm delší než druhá?

7. Zpaměti: Uspořádejte sestupně tyto mnohočleny v proměnné $c$:
   a) $3c^4 + 2c^2 - 4c^3 + 1 - c$;
   b) $c^2 - 7c^4 + 4c - 15 + 5c^5 - 7c^3$;
   c) $ac^6 - bc - c^4 + mc^2 - n$;
   d) $pc^4 + qc - mc^2 + nc^3 + v + 1$.

8. Proveďte a výsledný mnohočlen v proměnné $x$ uspořádejte sestupně nebo vzestupně:
   a) $5x^3 - 3x^2 + 4x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$;
   b) $2x - [3x^2 + (4x^3 - 2x + 1)]$;
   c) $x^4 - \{3x^2y^2 - [2x^4 - (x^3y - y^4)]\}$;
   d) $2x^3 - [2x^2 - (2x + 1)] - [x + (3x^3 - x)]$;
   e) $15x^2 - \{-4x^2 + [5x - 8x^2 - (2x^2 - x) + 9x^2] - 3x - 1\}$.

9. Určete výrazy: a) $A + B - C$, b) $A - B + C$, c) $B - C - A$, je-li $A = 5a^4 - 8a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3 - b^4$,

$B = a^4 + 3a^3b - 5a^2b^2 - 6ab^3 - 2b^4,$
$C = -4a^4 + 5a^3b - 7a^2b^2 + 10ab^3 - 5b^4.$

10. Zpaměti: Jakou hodnotu má výraz $x^3 - 3x^2 + x + 1$ pro a) $x = 1$, b) $x = -1$, c) $x = 2$, d) $x = -2$?

11. Jakou hodnotu má výraz $a^4 - a^2b + ab^2 - 1$ pro a) $a = 1$, $b = 2$, b) $a = 2$, $b = 1$, c) $a = 1$, $b = -1$, d) $a = -1$, $b = 1$?

12. K mnohočlenu $2n^3 - 3n^2 + 2n - 1$ stanovte mnohočlen opačný. Jaké hodnoty mají tyto mnohočleny pro a) $n = 3$, b) $n = -4$?

13. Jakou hodnotu má výraz $5abc - \{2a^2b - [3abc - (4ab^2 - a^2b)]\}$ pro $a = -2$, $b = -2$, $c = -4$?

14. Jakou hodnotu má výraz
$3x^2y - \{xyz - (2xyz - x^2z) - 4x^2z + [3x^2y - (4xyz - 5x^2z)]\}$
pro $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$?

15. Jakou hodnotu má výraz
$pqr - \{3p^2q - [4pqr + (2pq^2 - 3p^2q)]\}$ pro $p = 1$, $q = 1$, $r = -2$?

16. Přesvědčte se, že hodnota výrazu $x^2 + x + 11$ pro $x = 1, 2, 3, \ldots, 9$ je prvočíslo.

17. Zpaměti: Přesvědčte se, že hodnota výrazu $x^2 + x + 5$ pro $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ je prvočíslo.

18. Proveďte:
a) $(x + y)x - (x - y)y - (x + y)y - (x - y)x$;
b) $a^2(b^2 - c^2) - b^2(c^2 + 1) + c^2(a^2 + b^2) + b^2(1 - a^2)$;
c) $4(x - y + z) - 2(x + y - z) - 3(-x - y - z)$;
d) $p(p + q - r) - q(p - q - r) + r(p - q + r)$;
e) $x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 - xy - y^2) - x(x^2 + 2y^2)$;
f) $ab(c + d) - ac(b + d) + ad(b - c) + bc(a + d) - bd(a - c) +$
$+ cd(a - b)$;
g) $4a(5b - 2a) - 4(7a^2 - 3ab) - 2a(3a - 3b)$;
h) $1{,}4x(0{,}5x - 0{,}3y) - 5(0{,}4y^2 - 4xy) + 0{,}2y(8y - 5x)$;
i) $r^3(r^2 + 3) + r^2(r^3 + r^2) - r^3(r + 1)$;
j) $x^3(x + y^3) - (xy)^3 + (2x^2)^3$;
k) $(a^2b^3)^2 + (2a^2)^2y^2 - (a^2y)^2 - a^4(b^6 + 1)$.

19. Proveďte:
a) $(a + 2m)(2a - m) - (a - 2m)(2a + m)$;
b) $(2y + 1)(2y + 3) + (2y + 3)(2y + 5) - 8(y + 1)(y + 2)$;
c) $(p^2 - pq + q^2)(p + q)$;
d) $(1{,}44p^2 + 0{,}6pq + 0{,}25q^2)(1{,}2p - 0{,}5q)$;
e) $(v^3 - v^2 + v - 1)(v + 1)$;
f) $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$;

g) $(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b)$;
h) $(x + 1)(x + 2)(1 - x) + x(x + 5)(x - 3)$;
i) $(2a - b)[a(4a + b) + b(a + b)]$;
j) $(2a^2 + 2a + 1)[(a + 1)(a - 1) + a(a + 2)]$;
k) $(u + v - t)(u + v) + (u + t - v)(u + t) + (v + t - u)(v + t)$;
l) $(m^2 + n^2 + r^2 - mn - mr - nr)(m + n + r)$.

**20.** Napište výraz $ABC$ jako mnohočlen v proměnné $x$, je-li $A = x + 1$, $B = x^2 - 1$, $C = x^3 + 1$ a uspořádejte ho sestupně.

**21.** Jakou hodnotu má výraz $(x + 1)(x + 2) + (x + 3)(x + 4)$ pro $x = -0{,}4$?

**22.** Jakou hodnotu má výraz $(x + 2)(x - 3) + (x + 6)(x - 5) - 2(x^2 - 7x + 13)$ pro $x = 5{,}6$?

**23.** Oč se zvětší objem kvádru o rozměrech 1, 2, 3, zvětší-li se každý jeho rozměr o kladné číslo $z$? Správnost výsledku si ověřte třeba pro číslo $z = 4$.

**24.** Oč se zmenší obsah obdélníka o rozměrech $a$, $b$, zmenší-li se oba jeho rozměry o kladné číslo $z$? Ověřte si správnost výsledku třeba pro $a = 10$, $b = 8$, $z = 3$.

**25.** Dělte a proveďte zkoušku:
a) $(6x^2 - 11x - 10) : (3x + 2)$, $x \neq -\dfrac{2}{3}$;
b) $(a^3 - b^3) : (a - b)$, $a \neq b$;
c) $(c^3 + c^2 - 11c - 15) : (c + 3)$, $c \neq -3$;
d) $(9y^4 + 26y^2 + 25) : (3y^2 - 2y + 5)$, $3y^2 - 2y + 5 \neq 0$;
e) $(x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 7x - 2) : (x^2 - 3x + 2)$, $x^2 - 3x + 2 \neq 0$.

**26.** Uspořádejte vhodným způsobem oba mnohočleny a potom dělte:
$$(11p^3 - 32 + 19p^2 + 3p^4 - 28p) : (-4 + 3p),\ p \neq \frac{4}{3}.$$

**27.** Proveďte zpaměti:
a) $(p + a)^2$; b) $(m - n)^2$; c) $(2 + a)^2$; d) $(3 - b)^2$;
e) $(a - 4)^2$; f) $(3a - b)^2$; g) $(5u + v)^2$; h) $(a^2 - b)^2$; i) $(c^3 - 1)^2$;
j) $(x^2 + y^3)^2$; k) $(z^3 - u^3)^2$.

**28.** Proveďte:
a) $(1{,}2x^2y - 0{,}5x^3y^2)^2$; b) $(-2{,}5m^2n^3 - 0{,}2m^3n^2)^2$;
c) $(a^m + b^n)^2$, $n$, $m$ jsou přirozená čísla; d) $(5x^3 - 2y^n)^2$, $n$ je přirozené číslo.

**29.** Dokažte, že platí
$$a^2 + b^2 = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}.$$
Užijte tohoto vztahu k výpočtu hodnot a) $55^2 + 45^2$; b) $125^2 + 75^2$; c) $309^2 + 291^2$; d) $0{,}64^2 + 0{,}36^2$.

**30.** Dokažte platnost vztahu $(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25$. Užijte jej při výpočtu hodnot $25^2$, $35^2$, $45^2$, $55^2$, $65^2$, $75^2$, $85^2$.

**31.** Proveďte:
$(6x^2 - 5)^2 - (4x^2 - 7)^2 - 2x^2(2x - 3)(2x + 3)$.

**32.** Dokažte, že pro všechna čísla $a$, $b$, $x$, $y$ platí:
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = (bx - ay)^2$.

**33.** Přičteme-li k součinu dvou po sobě následujících celých čísel větší z nich, dostaneme druhou mocninu toho většího čísla. Dokažte to.

**34.** Dosadíme-li do výrazů $x = ab$, $y = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$, $z = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ za $a$, $b$ libovolná lichá čísla, dostaneme tři celá čísla $x$, $y$, $z$, o nichž platí $z^2 = x^2 + y^2$. Dokažte si platnost tohoto vztahu. Zkuste zjistit $x$, $y$, $z$ pro některá určitá čísla.

**35.** Proveďte:
a) $(a + b + c)^2$; b) $(a - b - c)^2$; c) $(3x^2 + 2xy - 3y^2)^2$;
d) $(1 + x^n - x^{2n})^2$, $n$ přirozené číslo; e) $(a + b + c + d)^2$;
f) $(2m + 3k + 4p - 5q)^2$.

**36.** Proveďte:
a) $(3m + 3)^3$; b) $(4x^2 + 7)^3$; c) $(5a^2 + 3a)^3$; d) $(x^4 + x^2)^3$;
e) $(5a^2 - 6a^4)^3$; f) $(3x^2y - 5xy^3)^3$.

**37.** Proveďte:
a) $(2x - 1)^3 - (x - 2)^3$;
b) $(3x + y)^3 - (9x^2 + 6xy + y^2)(3x - y)$;
c) $(a + 2)^3 - 3(a + 2)^2(a + 1) + 3(a + 2)(a + 1)^2 - (a + 1)^3$.
(Návod: Dosaďte za $a + 2 = y$, za $a + 1 = x$.)

**38.** Proveďte:
a) $(a^2 - 1)^3 - (a^2 - 1)(a^2 + 1)^2 + 2a^2(a^2 - 2) + a^4(a^4 + 2)$;
b) $(2x - 1)^3 . (2x + 1)^3$;
c) $(a^2 - ab + b^2)^3 . (a + b)^3$.

***39.** Dokažte správnost vztahů:
a) $6(x + 1)^2 + 2(x - 1)(x^2 + x + 1) - 2(x + 1)^3 = 6x + 2$;
b) $5x(x - 3)^2 - 5(x - 1)^3 + 15(x^2 - 4) = 30x - 55$;
c) $(x + y)^3 + (x - y)^3 + 3(x + y)^2(x - y) + 3(x + y)(x - y)^2 =$
$= 8x^3$;
d) $(2ax - 3by)^3 + (3ax - 2by)^3 - 35(a^3x^3 - b^3y^3) +$
$+ 100abxy(ax - by) = 10abxy(ax - by)$.

***40.** Proveďte:
a) $(x - 1)^6$; b) $(a^2 + 2)^6$; c) $(2x - 1)^6$.

**41.** Dětská stavebnice se skládá z krychle o hraně $a$ cm, ze tří kvádrů o rozměrech $a$ cm, $b$ cm, $b$ cm, z dalších tří kvádrů o rozměrech $a$ cm, $a$ cm,

$b$ cm a z krychle o hraně $b$ cm. Jak velký je její objem? Lze tuto stavebnici složit do krychlové krabice o hraně $(a + b)$? Načrtněte si obrázek. Jakou velikost má barevný papír, jímž jsou všechny části stavebnice polepeny?

***42.** Proveďte:

a) $(a + b)^2 - (a - b)^2 + (ab + 1)^2 - (ab - 1)^2$;
b) $[(p + 1)^2 - (p - 1)^2]^2$;
c) $[(2x^2 - 3y^3)^2 + (3x^2 + 2y^3)^2]^2$.

**43.** Dokažte, že platí:
a) $(a - b + c)^2 = (b - a - c)^2$;
b) $(a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (-a + b + c)^2 =$
$= 3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc)$.

**44.** Který výraz je nutno přičíst k výrazu $(x + y)^2 + z^2$, aby vznikl výraz $(x + y - z)^2$?

**45.** O kolik se zvětší hodnota výrazu $(a + b + 1)^2$, zvětší-li se číslo $a$ o 1?

**46.** Dokažte, že součin $(5r + 3a - 4b)(5r - 3a + 4b)$ je čtverec, je-li $r^2 = a^2 + b^2$.

**47.** Určete výraz $x^2 - y^2 - z^2$, je-li $x = m + n - p$, $y = m - p$, $z = m - n$.

**48.** Dokažte, že pro všechna čísla $a, b$ platí:
$(a^2 + ab + b^2)^2 + (a^2 - ab + b^2)^2 + (a^2 + ab - b^2)^2 +$
$+ (a^2 - ab - b^2)^2 = 4(a^4 + a^2b^2 + b^4)$.

***49.** Zjednodušte:

$$\frac{1}{4}\{(a + b - c - 1)^2 + (a - b + c - 1)^2 + (-a + b + c - 1)^2 +$$
$$+ (a + b + c + 1)^2\}.$$

**50.** Pro která čísla $x, y$ je hodnota výrazu $(4x - 3y)^2 + (5x + 10)^2$ rovna nule?

## 2. ROZKLAD MNOHOČLENŮ V SOUČIN

**51.** Rozložte v součin činitelů výrazy:

a) $2mp - 2mq$;
b) $2aby - 10acy + 8bcy$;
c) $7u^3vx + 14u^2v^2x^2 - 21ux^4$;
d) $p^3q^2r + pq^3r^2 + pq^2r$;
e) $x^3y^2 + x^2y^3 + x^2y^2$;
f) $x(a + b)^2 + x^2(a + b)$;
g) $3v^2(v - r)^3 + 6v^3(v - r)^2$;
h) $ax^5 - 2a^2x^4 + a^3x^3$;
i) $8b^2 - 18c^2$;
j) $9a^2 - (a - b)^2$;
k) $9p^4(a - b) - 25q^2(a - b)$;
l) $9x^2 - 6xy + y^2 - z^2$;

m) $m^2 - n^2 - p^2 + 2np$; n) $(a - b)x^4 + (b - a)x^2$;
o) $100x^2 - 4(7x - 2y)^2$; p) $(u + 3v)^2 - 9(v - q)^2$;
r) $9(2a - x)^2 - 4(3a - x)^2$; s) $(4p + 3q)^2 - 16(p - q)^2$;
t) $48(a + b)^2 - 12(a - b)^2$; u) $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$;
v) $a(p - q + 1)(ax^2 + b) + b(p - q + 1)(bx^2 - a) + $
$+ 2abx^2(p - q + 1)$.

52. a) $2a^5 - 2a$; b) $2a^4 - 32$;
c) $(r + s)^4 - r^4$; d) $ac + nad + bc + nbd$;
e) $a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc$; f) $xz - yz - x^2 + 2xy - y^2$;
g) $m^3 - m^2n - mn^2 + n^3$; h) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$;
i) $p^2y^2 - 4p^2 - y^2 + 4$; j) $2k^4 - k^3 + k - 2$;
k) $a^2y - aby + a^3y - ab^2y$; l) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$;
m) $y^4 - 2y^3 + 2y^2 - 2y + 1$
[návod: $y^4 + 2y^2 + 1 = (y^2 + 1)^2$];
n) $2h^2 + h - 1$
[návod: $2h^2 = h^2 + h^2$];
o) $2a^5 + 6a^4 + 6a^3 + 2a^2$; p) $27r^4 - r$;
q) $2a^2x^4 + 16a^2x$; r) $(a + b)^3 - (a - b)^3$;
s) $x^4 + x^3 + x + 1$; t) $m^5 + m^3 - m^2 - 1$;
u) $y^3 - 3y^2 + 4$
[návod: $4 = 3 + 1$].

*53. a) $a^3 + 3a^2 + 4a + 2$
[návod: $a^3 + 3a^2 + 4a + 2 = (a^3 + 2a^2 + 2a) + (a^2 + 2a + 2)$];
b) $2b^4 + b^3 + 4b^2 + b + 2$
[návod: $2b^4 + b^3 + 4b^2 + b + 2 = (b^3 + b) + (2b^4 + 4b^2 + 2)$].

**54.** Rozložte v součin trojčlen $x^2 + 10x + 24$.

**Řešení A**

$$x^2 + 10x + 24 = x^2 + 4x + 6x + 24 = x(x + 4) + 6(x + 4) = \\ = (x + 4)(x + 6).$$

**Řešení B**

Předpokládejme, že lze provést rozklad uvedeného trojčlenu takto: $x^2 + 10x + 24 = (x + a)(x + b)$, kde $a$, $b$ jsou celá čísla. Jelikož $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, je zřejmé, že hledáme taková dvě celá čísla $a$, $b$, aby platilo $a + b = 10$, $ab = 24$.

Přihlédneme-li k součinu těchto čísel, pak tu připadají v úvahu jen tyto dvojice: (24; 1), (12; 2), (8; 3), (6; 4), (−24; −1), (−12; −2), (−8; −3), (−6; −4). Součet 10 však má jedině dvojice (6; 4). Je tedy $a = 6$, $b = 4$. Závěr: $x^2 + 10x + 24 = (x + 6)(x + 4)$.

**55.** Rozložte kvadratické trojčleny v součin lineárních dvojčlenů:

a) $x^2 - 10x + 24$; b) $x^2 + 3x - 10$; c) $x^2 + x - 6$;
d) $x^2 - x - 6$; e) $x^2 - x - 110$; f) $x^2 + 18x + 81$;
g) $x^2 + 24x + 143$; h) $x^2 + 2x - 143$; i) $x^2 - 2x - 143$;
j) $x^2 + 17x + 72$; k) $x^2 - x - 72$; l) $x^2 + 27x + 72$;
m) $x^2 - 21x - 72$; n) $x^2 - 8x - 48$; o) $x^2 + 15x + 36$.

Abyste se přesvědčili, že rozklad je správný, proveďte násobení dvojčlenů, které rozklad obsahuje.

**56.** Rozložte v součin trojčleny:

a) $x^3 + x^2 - 42x$; b) $x^4 - 9x^3 - 10x^2$; c) $x^5 + x^4 - 56x^3$;
d) $x^4 + 2x^2 - 3$; e) $x^4 + 11x^2 + 24$; f) $y^4 - 13y^2 + 40$;
g) $a^5 + 3a^3 - 4a$; h) $4x^2 - 8x + 3$
[návod: $4x^2 - 8x + 3 = (2x)^2 - 4 \,.\, (2x) + 3$];
i) $9a^2 - 9a + 2$; j) $4b^2 - 14b + 10$.

**57.** a) $3a^2 + 5a - 2$
[návod: $5a = 6a - a$];
b) $2y^2 + 3y + 1$
[návod: $3y = 2y + y$];
c) $6x^4 - 13x^2 + 6$
[návod: $-13x^2 = -4x^2 - 9x^2$];
d) $4a^2 - 3a - 1$; e) $2y^4 + y^2 - 1$; f) $6p^2 + p - 1$;
g) $6a^2 - 7a - 5$; h) $10x^2 - 13x - 3$.

***58.** a) $x^2 + (a - 3)x + 2(1 - a)$;
b) $x^2 - (a + 2)x + (1 + a)$.

$\boxed{\textbf{59.}}$ Rozložte v součin činitelů výraz

$$V = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3.$$

**Řešení**

Rozložme nejprve v součin výraz $U = (x - y)^3 + (y - z)^3$.

$$U = (x - y + y - z) \,.\, [(x - y)^2 - (x - y)(y - z) + (y - z)^2] =$$
$$= (x - z)(x^2 - 2xy + y^2 - xy + y^2 + xz - yz + y^2 - 2yz + z^2) =$$
$$= (x - z)(x^2 + 3y^2 + z^2 - 3xy + xz - 3yz).$$

Potom

$$V = U + (z - x)^3 = U - (x - z)^3 = U - (x - z)(x - z)^2 =$$
$$= (x - z)(x^2 + 3y^2 + z^2 - 3xy + xz - 3yz - x^2 + 2xz - z^2) =$$
$$= (x - z)(3y^2 - 3xy + 3xz - 3yz) =$$
$$= 3(x - z) \,.\, [y(y - x) - z(y - x)] = 3(x - z)(y - x)(y - z) =$$
$$= 3(x - y)(y - z)(z - x).$$

Závěr: $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$.

***60.** Rozložte v součin činitelů výraz:

a) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$;

b) $(x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3$;
c) $[(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) + 4abpq]^2 - 4[pq(a^2 + b^2) + ab(p^2 + q^2)]^2$.
[Návod: Užijte k rozkladu vzorce $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.]

**61.** Dokažte, že pro všechna čísla $a$, $b$, $c$ platí:
$bc(c - b) + ac(a - c) + ab(b - a) = (a - b)(b - c)(c - a)$.

***62.** Rozložte v součin činitelů výraz
$V = a^3(b - c)^3 + b^3(c - a)^3 + c^3(a - b)^3$.

***63.** Dokažte, že pro všechna čísla $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$ platí:
$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (ax + by + cz)^2 =$
$= (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$.

$\boxed{\textbf{64.}}$ Platí-li o číslech $a$, $b$, $c$ vztah $a + b + c = 0$, platí též vztah $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Dokažte to.

**Řešení**

$(a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 +$
$+ 3c(a + b)^2 + 3c^2(a + b) + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) +$
$+ 3c(a + b)^2 + 3c^2(a + b) =$
$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(ab + ac + bc + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 +$
$+ 3(a + b)[a(b + c) + c(b + c)] = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b +$
$+ c)(c + a)$. Jelikož platí vztah $a + b + c = 0$, je $a + b = -c$, $a + c = -b$, $b + c = -a$.
Zřejmě platí též $0 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, odkud je
$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc\,.$$
Závěr: Je-li $a + b + c = 0$, platí o číslech $a$, $b$, $c$ vztah $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

**65.** Dokažte, že pro všechna čísla $a$, $b$, $c$ je hodnota výrazu
$V = a^2 + b^2 + c^2 - 2(a + b + c) + 3$ nezáporné číslo.
[Návod: Upravte výraz $V$ na tvar: $V = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2$.]

***66.** Je dán výraz $V = (x + y)^2(x - y) + (y + z)^2(y - z) + (z + x)^2(z - x)$. Rozložte ho v součin a zdůvodněte, že výraz $V \neq 0$ tehdy, jsou-li čísla $x$, $y$, $z$ navzájem různá.

**67.** Najděte všechny dělitele výrazů:
a) $6a$; b) $5pq$; c) $2a^2b$; d) $x^2 - xy$; e) $a^3 + 2a^2 + a$; f) $81x^4 - 16y^4$.

**68.** Určete největší společný dělitel výrazů:
a) $2a^5b^3x^2$; $8a^4b^4x^2y^2$; b) $a^2 + 2a + 1$; $a^2 - 1$;
c) $a^3b + 3a^2b$; $a^2b - 9b$; d) $p^4 - 1$; $p^3 - p^2 + p - 1$;
e) $m^2 - n^2$; $(m - n)^2$; $m^2 - mn$; f) $a^2 + 3a$; $a^2 - 9$; $(a^2 - 5a)(a + 3)$;
g) $(b + 5)^2$; $b^2 - 25$; $b^2 + 5b - 3bx - 15x$;
h) $a^3 + 2a^2b - ab^2 - 2b^3$; $a^3 - 2a^2b - ab^2 + 2b^3$;
i) $8a^3 - 1$; $6a - 3$; $2a^2 + a - 1$;

j) $u^3 + v^3$; $u^4 + u^2v^2 + v^4$
[návod: $u^2v^2 = 2u^2v^2 - u^2v^2$];
k) $q^3 + 1; q^4 + q^2 + 1; q^4 \quad q^3 + q - 1$
[návod: $q^2 = 2q^2 - q^2$];
l) $x^2 - 4x + 3; x^2 - 2x - 3$;
m) $a^2 - a - 2$; $a^2 - 4$; $a^2 - 5a + 6$;
n) $y^2 - 11y + 28$; $y^2 - 2y - 8$; $y^2 - 3y - 4$.
Úlohy a) – g) řešte zpaměti.

**69.** Určete nejmenší společný násobek výrazů [a)—d) zpaměti]:
a) $a^5b^3x^4$; $a^5b^4x^5$;
b) $abx + ab$; $ax^2 - a$; $bx - b$;
c) $y^2 - y$; $y^3 + y^2$; $(y - 1)^2$; $(y^2 - 1)^2$;
d) $p^2 - 2pq$; $p^2 - q^2$; $px + qx$;
e) $ac + ad + bd + bc$; $ac - ad - bc + bd$; $ac - ad + bc - bd$;
*f) $r^2 - 4rs - 12s^2$; $r^2 - rs - 6s^2$;
g) $4 - x^2$; $8 - x^3$;
h) $a + 1$; $a^3 + 1$; $a^4 - 1$;
i) $x^2 + 3x + 2$; $x^2 - 2x - 3$;
j) $x^2 - 10x + 16$; $x^3 - 10x^2 + 16x$; $x^2 - 5x - 24$.

**70.** Určete největší společný dělitel a nejmenší společný násobek výrazů:
a) $x^2 - y^2$; $x^4 - y^4$; $x^6 - y^6$;
b) $x^3 + x^2 + x + 1$; $x^2 - 1$;
c) $a(2a + 3b) - 3b(2a + 3b)$; $4a^2 + 12ab + 9b^2$;
d) $2x^3 - 2xy^2 + x^2 + xy$; $4x^4 + 4xy^3$;
e) $a^3 + 4a^2b + 4ab^2$; $a^3 - 4ab^2$; $3a^3 + 6a^2b$;
f) $4x^3y^2 - 8x^2y^3$; $2x^3y - 8x^2y^2 + 8xy^3$; $2x^4y - 16xy^4$;
g) $m + 1$; $m^2 - 1$; $m^2 - 2m + 1$;
h) $3x^2 + 3x$; $5x^2 - 5x$; $10x^2 + 10x$;
i) $x^5 + x^3$; $x^5 + x$; $x^5 - x$;
j) $x^3 + y^3$; $x^3 - x^2y + xy^2$; $x^3 + x^2y$;
k) $ac + bc + ad + bd$; $ae + be + af + bf$; $ce + de + cf + df$;
l) $x^2 + 4x - 45$; $2x^2 - 9x - 5$;
m) $x^2 - 4$; $x^2 + x - 2$; $x^2 + 3x + 2$.

**71.** Určete největší společný dělitel a nejmenší společný násobek mnohočlenů $M = (x^2 - y^2)(x^3 - x^2 - x - 2)$, $N = (x - y)(x^4 - 3x^2 - 4)$.

***72.** Napište dva mnohočleny třetího stupně v proměnné $z$, je-li jejich největší společný dělitel $D = z^2 + 2z - 3$ a nejmenší společný násobek $n = z^4 - 10z^2 + 9$.

**73.** Určete dvojím způsobem podíl následujících výrazů (pomocí rozkladu dělence v součin i dělením mnohočlenu mnohočlenem):
a) $(m^2 - 2m - 15) : (m - 5)$, $m \neq 5$;

b) $(z^2 + 7z + 12) : (z + 4)$, $z \neq -4$;

c) $(2x^2 + 5x - 12) : (2x - 3)$, $x \neq \frac{3}{2}$;

d) $(xy - 7x + 2y - 14) : (x + 2)$, $x \neq -2$;

e) $(15 - 9a + 5a^2 - 3a^3) : (5 - 3a)$, $a \neq \frac{5}{3}$;

f) $(6n^2 + 5n - 6) : (2n + 3)$, $n \neq -\frac{3}{2}$.

**74.** Rozkladem dělence i dělitele v součin určete podíl výrazů:

a) $(9a^4 - 13a^2 + 4) : (3a^2 + 5a + 2)$, $a \neq -1$, $a \neq -\frac{2}{3}$;

b) $(m^5 - m^4n + m^3n^2 - m^2n^3) : (m^3 + mn^2)$, $m \neq 0$.

***75.** Určete $u$ tak, aby podíl těchto výrazů měl nulový zbytek:

a) $(a^3 + u) : (a + 4)$, $a \neq -4$;

b) $(x^3 + 9x^2 + 19x + u) : (x - 3)$, $x \neq 3$;

c) $(z^3 + 9z^2 + 18z + u) : (z - 4)$, $z \neq 4$.

**76.** Dělte výrazy $x^4 - 1$, $x^5 - 1$, $x^6 - 1$ výrazem $(x - 1)$, $x \neq 1$. Ze srovnání vzniklých podílů usuďte, jaký podíl dostanete, provedete-li dělení $(x^n - 1) : (x - 1)$, kde $n$ je libovolné přirozené číslo.

**77.** Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí:
$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x^2 + x + 1)$.
[Návod: Proveďte naznačené násobení na pravé straně uvedené rovnice.]

**78.** Dokažte, že platí:
$x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - x^{n-4} + \ldots + 1)$, je-li $n$ číslo liché. Dokažte též pro $n = 3$ a $n = 5$.

**79.** Dokažte, že výraz $x^5 - 10x^4 + 10x - 1$ je dělitelný výrazem $(x - 1)$.

**80.** Dokažte, že výraz $x^n - ax^{n-1} + ax - 1$ je dělitelný výrazem $(x - 1)$, pro všechna přirozená čísla $n > 1$.

## 3. ZLOMKY

**81.** Rotor elektromotoru se otočí za $t$ vteřin $n$-krát. Kolikrát se otočí za hodinu?

***82.** Vlak dlouhý $x$ metrů jede po mostě dlouhém $y$ metrů rychlostí $c$ metrů za minutu. Kolik minut uplyne mezi okamžikem, kdy vjede lokomotiva na most, a okamžikem, kdy poslední vagón most opustí? Načrtněte si obrázek.

***83.** Ze dvou druhů zboží byla vyrobena směs. Prvého druhu bylo vzato $h$ kg, druhého $k$ kg. Jakou cenu měl 1 kg směsi, jestliže 1 kg zboží prvého druhu stál $x$ Kčs, kdežto 1 kg zboží druhého byl o $y$ Kčs levnější?

*84. Traktorista oral v katastru jedné farmy $x$ dní po deseti hodinách a $y$ dní po osmi hodinách. Jestliže zoral takto $m$ hektarů polí, kolik hektarů zoral průměrně za jednu hodinu? Proveďte též pro $m = 50, x = 6, y = 5$.

85. Dvě ozubená kola zapadají do sebe. Prvé kolo má $y$ zubů, druhé $(y + 30)$ zubů. Kolikrát se otočí prvé kolo, otočí-li se druhé $n$-krát? Proveďte též pro $n = 42, y = 35$.

86. Určete hodnotu zlomku $\frac{x+y}{x-y}$ pro a) $x = 4\frac{3}{4}$, $y = 5\frac{5}{8}$; b) $x = 3\frac{5}{6}$, $y = \frac{3}{8}$.

87. Určete hodnotu zlomku $\frac{a^2-4}{a+2}$ pro a) $a = 0{,}6$; b) $a = 0{,}5$; c) $a = -4$.

88. Určete hodnotu zlomku $\frac{a^2-4}{c(a+2)-(a+2)}$ pro $a = 3, c = -\frac{3}{4}$.

89. Pro která čísla $x$ mají smysl zlomky:

a) $\frac{1-x}{x}$; b) $\frac{1}{1-x}$; c) $\frac{x+y}{x-y}$; d) $\frac{2}{x^2-2x}$; e) $\frac{2x+1}{x^2+4x+4}$;

f) $\frac{x}{x^2+5x+6}$; g) $\frac{2x+1}{x^3+x^2+x+1}$; h) $\frac{x^2+1}{x^2+(m-n)x-mn}$.

90. Odůvodněte správnost úprav (zpaměti):

a) $\frac{a-2}{b-4} = \frac{2-a}{4-b} = -\frac{a-2}{4-b} = -\frac{2-a}{b-4}$, $b \neq 4$;

b) $\frac{a}{(x-a)(x-b)} = \frac{a}{(a-x)(b-x)} = -\frac{a}{(a-x)(x-b)} =$

$= \frac{-a}{(x-a)(b-x)}$, $x \neq a, x \neq b$.

91. Rozšiřte zlomky $\frac{a+b}{ab}$, $\frac{a-b}{ab}$, $\frac{a^2+ab+b^2}{ab}$ číslem $(a-b)$.

Pro která čísla $a, b$ budou mít zlomky smysl?

92. Rozšiřte zlomky $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p+1}$, $\frac{1}{p-1}$, $\frac{p^2-p+1}{p+1}$, $\frac{(p+1)^2}{p}$,

$\frac{(p^2 + 1)(p - 1)}{p + 1}$ číslem $(p + 1)$. Pro která čísla $p$ budou mít zlomky smysl?

**93.** Napište výrazy $x$, $x^2 - 1$, $x^2 + 1$ jako zlomky se jmenovatelem $(x^2 + 1)$. Pro která čísla $x$ mají tyto zlomky smysl?

**94.** Které číslo je nutno dosadit za $x$, má-li mít zlomek $\frac{x}{20}$ hodnotu $\frac{3}{4}$? Je tu možno využít pravidla o rozšiřování zlomků?

**95.** Srovnejte sestupně podle velikosti zlomky $\frac{n}{2}$, $\frac{2n}{5}$, $\frac{3n}{8}$, $\frac{7n}{10}$, $\frac{19n}{20}$, je-li a) $n > 0$; b) $n < 0$.

**96.** Srovnejte vzestupně podle velikosti zlomky $\frac{1}{r}$, $\frac{3}{2r}$, $\frac{4}{3r}$, $\frac{5}{6r}$, $\frac{1}{5r}$, je-li a) $r > 0$; b) $r < 0$.

**97.** Je dán zlomek $z = \frac{a^3 - 2a^2 - a + 2}{a^3 + 2a^2 - a - 2}$. a) Rozhodněte, pro která čísla $a$ má zlomek smysl. b) Pro která čísla $a$ má zlomek $z$ hodnotu rovnou nule? c) Zdůvodněte, že zlomek $z$ má hodnotu kladnou pro všechna čísla $a > 2$.

**Řešení**

a) $a^3 + 2a^2 - a - 2 = a^2(a + 2) - (a + 2) = (a + 2)(a^2 - 1) =$
$= (a + 2)(a + 1)(a - 1)$.

Z rozkladu je patrno, že zlomek $z$ má smysl pro všechna čísla $a \neq -2$, $a \neq -1$, $a \neq 1$.

$$z = \frac{a^3 - 2a^2 - a + 2}{(a + 2)(a + 1)(a - 1)} = \frac{a^2(a - 2) - (a - 2)}{(a + 2)(a + 1)(a - 1)} =$$
$$= \frac{(a - 2)(a^2 - 1)}{(a + 2)(a^2 - 1)} = \frac{a - 2}{a + 2}.$$

b) Zlomek má hodnotu rovnou nule, jestliže při nenulovém jmenovateli je jeho čitatel rovný nule. Tato podmínka je v našem případě splněna jen pro číslo $a = 2$.

c) Pro všechna čísla $a > 2$ má čitatel i jmenovatel zlomku $z$ hodnotu kladnou.

Závěr: Zlomek $z$ má smysl pro všechny hodnoty $a \neq -2$, $a \neq -1$ $a \neq 1$; po zkrácení má tvar $z = \frac{a - 2}{a + 2}$. Nulové hodnoty nabývá jen pro číslo $a = 2$; pro čísla $a > 2$ má hodnotu kladnou.

**98.** Zkraťte následující zlomky za předpokladu, že jejich jmenovatele nemají nulovou hodnotu [a) — c) zpaměti]:

a) $\dfrac{72abx}{84aby}$; b) $\dfrac{a^2 - ab}{ab - b^2}$; c) $\dfrac{y + 1}{n + ny}$; d) $\dfrac{x^2 - 1}{xs - s}$; e) $\dfrac{p^2 - 2pq + q^2}{p^2 - q^2}$;

f) $\dfrac{4a^2 - 1}{4a^2 - 4a + 1}$; g) $\dfrac{9z^2 - 12z + 4}{3z - 2}$; h) $\dfrac{16 - 8a + a^2}{ab - 4b}$;

i) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{a^2 + 2ac + c^2 - b^2}$; j) $\dfrac{p^2 - 4}{pq + 2q - p - 2}$;

k) $\dfrac{ab + 2b - ac - 2c}{ab - 2b - ac + 2c}$; l) $\dfrac{xy - y - x^2 + x}{xy + y - x^2 - x}$; m) $\dfrac{3uv + 9v - 2u - 6}{3uv - 2u - 9v + 6}$;

n) $\dfrac{a^2 + 2a - 15}{3a + 15}$; o) $\dfrac{r^2 - 4}{r^2 + 5r + 6}$; p) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$;

q) $\dfrac{a^2 - a - 20}{a^2 + a - 30}$; *r) $\dfrac{3x^2 + x - 10}{4x^2 + x - 14}$; s) $\dfrac{a^3 - 1}{a^2 - 1}$; t) $\dfrac{x^3 + x^2y + xy^2}{x^3y - y^4}$.

**99.** Dokažte správnost vztahu:

a) $\dfrac{ac + bx + ax + bc}{ay + 2bx + 2ax + by} = \dfrac{x + c}{2x + y}$, $a + b \neq 0$, $2x + y \neq 0$;

b) $\dfrac{x - xy + z - zy}{1 - 3y + 3y^2 - y^3} = \dfrac{x + z}{(1 - y)^2}$, $y \neq 1$.

***100.** Dokažte, že platí

$$\frac{3a^3 + ab^2 - 6a^2b - 2b^3}{9a^5 - ab^4 - 18a^4b + 2b^5} = \frac{1}{3a^2 - b^2}, \quad \begin{array}{l} a - 2b \neq 0, \\ 3a^2 + b^2 \neq 0, \\ 3a^2 - b^2 \neq 0. \end{array}$$

**101.** Uveďte zlomek $\dfrac{a + 1}{(a + 1)^2}$ na zlomek o jmenovateli $(a^2 - 1)$.

**102.** Uveďte zlomek $\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$ na zlomek o jmenovateli $(x + 1)^3$.

***103.** Je dán zlomek $z = \dfrac{x^2 + 2ax + a^2 - 16}{ax - 4x + a^2 - 16}$.

Vyšetřete, kdy tento zlomek nemá smysl a potom zlomek zkraťte.

**104.** Proveďte:

a) $\dfrac{3a + 2}{2} - \dfrac{a + 6}{2} + 5$;

b) $\dfrac{d-1}{2}+\dfrac{3d-1}{4}-\dfrac{5d-1}{6}$;

c) $\dfrac{(x+y)^2}{6}+\dfrac{(x-y)^2}{12}-\dfrac{x^2+y^2}{4}$.

**105.** Proveďte a potom udejte podmínky, za kterých mají dané výrazy smysl.

a) $\dfrac{2m-n}{m-n}+\dfrac{m}{n-m}$; b) $\dfrac{x-y}{xy}-\dfrac{z-y}{yz}+\dfrac{x+z}{xz}$;

c) $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1-a}{a^2}+\dfrac{1-a^2}{a^3}-\dfrac{1-a^3}{a^4}+\dfrac{1-a^4}{a^5}$;

d) $\dfrac{u^2+1}{u+1}-u$; e) $\dfrac{4mn}{m-n}+(m-n)$; f) $1-\dfrac{2p}{q}+\dfrac{p^2}{q^2}-\dfrac{(q-p)^2}{q^2}$;

g) $\dfrac{2p+q}{p^2+pq}+\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+q}$; h) $\dfrac{a-2b}{a+b}-\dfrac{2a-b}{b-a}-\dfrac{2a^2}{a^2-b^2}$;

i) $\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}-\dfrac{x(4-x)}{1-x^2}$;

j) $\dfrac{2p-3q}{2p+3q}-\dfrac{2p+3q}{2p-3q}+\dfrac{2(4p^2+9q^2)}{4p^2-9q^2}$;

k) $\dfrac{7v-1}{2v^2+6v}+\dfrac{5-3v}{v^2-9}$; l) $\dfrac{4}{3m-3n}-\dfrac{3m-4n}{2m^2-4mn+2n^2}$;

m) $\dfrac{2a-1}{2a}-\dfrac{2a}{2a-1}-\dfrac{1}{2a-4a^2}$.

**106.** Proveďte: $\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{4a}{a^2-1}-1$. Pro které hodnoty čísla $a$ nemá tento výraz smysl? Jakou hodnotu má pro $a=0$?

**107.** Proveďte: $a+1+\dfrac{a-1}{a^2-a+1}$. Ukažte, že výraz má smysl pro všechna čísla $a$.

[Návod: $a^2-a+1=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$.]

**108.** Proveďte: $\dfrac{1}{x^2-2x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+2x+1}$. Jakou hodnotu má tento výraz pro a) $x=2$; b) $x=-2$?
Pro které hodnoty $x$ nemá výraz smysl?

**109.** Proveďte: $\dfrac{1}{x^2 - 3x - 10} + \dfrac{1}{x^2 + x - 2} - \dfrac{2}{x^2 - 6x + 5}$.

Udejte všechna čísla $x$, pro která nemá výraz smysl.

**110.** Oč je větší výraz $x + \dfrac{1}{x}$ než výraz $\dfrac{x+1}{x}$ pro $x \geqq 1$? Ověřte si výsledek pro $x = 1, x = \dfrac{3}{2}, x = 3$.

***111.** Dokažte, že platí:

$$\frac{1}{a(a-c)(a-b)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}, \text{ jestliže}$$

$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, a \neq b, b \neq c, c \neq a$.

***112.** Dokažte, že platí:

a) $$\frac{1}{(a-b)(b-c)} - \frac{1}{(b-c)(a-c)} - \frac{1}{(c-a)(b-a)} = 0,$$
jestliže $a \neq b, b \neq c, c \neq a$;

b) $$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0,$$
$a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a$;

c) $$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0,$$
$a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a$;

d) $$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1,$$
$a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a$.

**113.** Trať kanoistického závodu je dlouhá $d$ km a závodníci ji musí projet jednou po proudu a podruhé proti proudu. Je-li rychlost kánoe v klidné vodě $v_1$km/h a rychlost proudu $v_2$km/h, za jakou dobu projede závodník tratí oběma směry? Byl by závodník dřív či později u cíle, kdyby jel stejně dlouhý závod se stejným výkonem v klidné vodě? Jaký by byl časový rozdíl?

### Řešení

Rychlost kánoe po proudu je $(v_1 + v_2)$ km/h, proti proudu $(v_1 - v_2)$ km/h, přičemž se předpokládá, že $v_1 > v_2$, aby úloha měla řešení.

Dráhu $d$ projede závodník po proudu za dobu $t_1 = \dfrac{d}{v_1 + v_2}$, proti proudu za dobu $t_2 = \dfrac{d}{v_1 - v_2}$ ($t_1$, $t_2$ v hodinách).

Dráhu $d$ v obou směrech projede tedy za dobu $t = \dfrac{d}{v_1 + v_2} + \dfrac{d}{v_1 - v_2} =$

$$= \frac{d(v_1 - v_2 + v_1 + v_2)}{v_1^2 - v_2^2} = \frac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2}.$$

Je zřejmé, že v klidné vodě by projel závodník dráhu $d$ oběma směry za dobu $t' = \dfrac{2d}{v_1}$.

Srovnáme-li zlomky $\dfrac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2}$, $\dfrac{2d}{v_1} = \dfrac{2dv_1}{v_1^2}$, pozorujeme, že mají stejného čitatele; větší je ten, který má menšího jmenovatele.

Platí tedy nerovnost $\dfrac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2} > \dfrac{2dv_1}{v_1^2}$, která ukazuje, že by závodník byl dříve u cíle, kdyby projížděl tratí $d$ v obou směrech v klidné vodě.

Zbývá ještě určit časový rozdíl. Tento rozdíl udává výraz

$$t_3 = t - t' = \frac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2} - \frac{2dv_1}{v_1^2} = \frac{2dv_1(v_1^2 - v_1^2 + v_2^2)}{v_1^2(v_1^2 - v_2^2)} =$$

$$= \frac{2dv_1v_2^2}{v_1^2(v_1^2 - v_2^2)} = \frac{2dv_2^2}{v_1(v_1^2 - v_2^2)}.$$

Závěr: Závodník projede tratí $d$ oběma směry za dobu $t = \dfrac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2}$ h.
Kdyby projížděl tuto trať v obou směrech v klidné vodě,
potřeboval by k tomu čas $t' = \dfrac{2d}{v_1}$ h, přičemž $t' < t$.
Časový rozdíl je $t_3 = \dfrac{2dv_2}{v_1(v_1^2 - v_2^2)}$ h.

**114.** V prvém pavilónu továrny pracuje $n$ dělníků, v druhém $m$ dělníků a ve třetím $s$ dělníků. Čtvrtina dělníků z prvého pavilónu, třetina z druhého a polovina z třetího jsou ženy. Kolik pracuje v továrně žen a kolik mužů?

**115.** Do prvého patra, které je ve výši $a$ metrů, má být vedeno $n$ schodů. O kolik by se musila zmenšit výška každého schodu, kdyby počet schodů vzrostl o tři?

**116.** Na stavbu vodní přehrady vyjelo $n$ brigádníků, z nichž každý se zavázal, že odpracuje $t$ hodin. Jeden brigádník však po cestě onemocněl a musil se vrátit; ostatní převzali jeho závazek na sebe. Na kolik hodin zvýšil každý ze zbývajících brigádníků svůj závazek?

**117.** Jestliže čísla $x, y, z$ jsou navzájem různá, potom platí:

a) $\dfrac{xy}{(z-x)(z-y)} + \dfrac{xz}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{yz}{(x-y)(x-z)} = 1$;

b) $\dfrac{x+y}{(y-z)(z-x)} + \dfrac{y+z}{(z-x)(x-y)} + \dfrac{x+z}{(x-y)(y-z)} = 0$. Dokažte to.

**118.** Dokažte, že hodnota výrazu $V = \dfrac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(b-1)^2}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{(c-1)^2}{(c-a)(c-b)}$ je kladné číslo, ať za $a, b$ dosazujeme libovolná čísla, pro něž má výraz $V$ smysl. Jaké vztahy musí platit o číslech $a, b, c$, aby výraz $V$ měl smysl?

**119.** Zjednodušte výraz $V = \dfrac{2b(a-1)}{(a-2)(b^2-1)} - \dfrac{a+b}{ab+a-2b-2} - \dfrac{a-b}{ab-a-2b+2}$ a ukažte, že je roven nule. Pro která čísla $a, b$ má daný výraz smysl?

**120.** Za předpokladu, že uvedené výrazy mají smysl, proveďte:

a) $\dfrac{6x^3b^3}{25y^4} \cdot \left(-\dfrac{15y}{b^2}\right)$; b) $\dfrac{9x}{a^3} \cdot \left(-\dfrac{y}{32b^2}\right)\left(-\dfrac{4a}{27xy}\right) \cdot 24a^2b^3$;

c) $\dfrac{2v^2+8v+8}{v-2} \cdot \dfrac{(v-2)^2}{4(v+2)}$; d) $\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) \cdot \dfrac{a^2}{a-b}$;

e) $\left(\dfrac{m+1}{m+2} - \dfrac{m-1}{m-2}\right) \cdot \dfrac{m^2-4}{2m}$; f) $\left(\dfrac{1}{z+1} - \dfrac{2z}{z^2-1}\right)\left(\dfrac{1}{z} - 1\right)$;

g) $\left(\dfrac{3}{1+s} - 1\right)\left(\dfrac{3}{2-s} - 1\right)$; h) $\left(a - \dfrac{a}{a+1}\right)\left(1 - \dfrac{1}{a^2}\right)$;

i) $\left(y + 1 + \dfrac{1}{2y-1}\right)\left(y - 1 + \dfrac{1}{2y+1}\right)$;

j) $\left(\dfrac{p-1}{p-2} - \dfrac{p}{p-1}\right)\left(p - \dfrac{p}{p+1}\right)(p^2-1)$;

k) $\left[\dfrac{3}{(x-3)^3} + \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{3}{x^2-9}\right] \cdot \dfrac{x^2-6x+9}{x^2+9}$;

l) $\left(\dfrac{x^2}{x-y}-x\right)\left(\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{y}{x}\right)$.

**121.** Proveďte a uveďte podmínky, při kterých mají uvedené výrazy smysl:

a) $\dfrac{4a^2b}{9pq^2}:\dfrac{2ab^2}{3p^2q}$;

b) $\left(\dfrac{18a^2}{b^3}\cdot\dfrac{c}{2a^3}\right):\left(-\dfrac{3a}{b^2c}\right)$;

c) $\dfrac{a^2+ax}{x-x^2}:\dfrac{x^2+ax}{a-ax}$;

d) $\left(1+\dfrac{m}{1-m}\right):\dfrac{1+m}{1-m}$;

e) $\left(\dfrac{2x^2-4x+2}{x^2+1}:\dfrac{6x-6}{x^4-1}\right):\dfrac{x+1}{3}$;

f) $\left(p+q-\dfrac{4pq}{p+q}\right):\dfrac{1}{p^2-q^2}$;

g) $\left(v+\dfrac{u-v}{1+uv}\right):\left[1-\dfrac{v(u-v)}{1+uv}\right]$;

*h) $\dfrac{r^4-s^4}{r^2s^2}:\left[\left(1+\dfrac{s^2}{r^2}\right)\left(1-\dfrac{2r}{s}+\dfrac{r^2}{s^2}\right)\right]$;

i) $\left(1+\dfrac{a^3}{b^3}\right):\left(1+\dfrac{a}{b}\right)$;

j) $(c^3-d^3):\left(c+\dfrac{d^2}{c+d}\right)$.

***122.** Proveďte:

$$6a+\left(\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}\right):\frac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}.$$

Pro která čísla $a$ má daný výraz smysl?

**123.** Upravte a rozhodněte, v kterých případech nemají uvedené výrazy smysl:

a) $\dfrac{m-\dfrac{4}{m}}{m+2}$;

b) $\dfrac{5+p}{5-\dfrac{p^2}{5}}$;

c) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-1}{\dfrac{a+b}{a-b}+1}$;

d) $\dfrac{\dfrac{x}{4}-\dfrac{x-1}{5}}{\dfrac{x+1}{6}-\dfrac{x-1}{10}}$;

e) $\dfrac{\dfrac{r+s}{r-s}-\dfrac{r-s}{r+s}}{1-\dfrac{r^2+s^2}{r^2-s^2}}$;

f) $\dfrac{2-\dfrac{k^2+z^2}{kz}}{\dfrac{k}{z^2}-\dfrac{2}{z}+\dfrac{1}{k}}$;

g) $\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2} - \dfrac{a}{b}}{\dfrac{a^2 + b^2}{ab} - 2} : \dfrac{a^2}{b}$; h) $\dfrac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{b^2}{a^2}}{1 - \dfrac{b}{a}} \cdot (a^2 - ab + b^2)$;

*i) $\dfrac{\dfrac{a^4 - b^4}{a^2b^2}}{\left(1 + \dfrac{b^2}{a^2}\right)\left(1 - \dfrac{2a}{b} + \dfrac{a^2}{b^2}\right)}$; *j) $\dfrac{\dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{x^2}{y} + x + y}{\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{y^2}{x^2}}$.

**124.** Proveďte za předpokladu, že uvedené výrazy mají smysl:

a) $\left(\dfrac{2x}{3a}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{9a}{x}\right)^2$; b) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^3 : \left(-\dfrac{b}{a}\right)^6$;

c) $\dfrac{(a^4)^2 \,.\, (b^2)^3}{(a^2)^4 \,.\, a^2} \cdot \left(\dfrac{a}{b^3}\right)^2$; d) $2\left[\left(-\dfrac{x}{y}\right)^2 \cdot \dfrac{y}{x}\right]^3 : \left(\dfrac{y}{x}\right)^4$;

e) $\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{a^2}{2x}\right)^2 \cdot \dfrac{3x^2}{(a^2)^3}$; f) $\left[\left(\dfrac{r}{s}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{s}{r}\right)^3 \cdot \dfrac{r^2}{s^2} \cdot \left(-\dfrac{2r}{s}\right)\right]^2$;

g) $\dfrac{\left(\dfrac{u}{v}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{1}{v}\right)^2}$; h) $\dfrac{\left(\dfrac{b}{c}\right)^3 - 1}{\left(\dfrac{1}{c}\right)^3} + (-b)^3$;

i) $\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y^2}\right] : \left(\dfrac{x - 1}{y}\right)^2$; j) $\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 + 2\right] \cdot \left(\dfrac{ab}{2}\right)^2$.

**125.** Proveďte: $\left[\left(\dfrac{n + 2}{n - 2}\right)^3 : \dfrac{n^3 + 4n^2 + 4n}{3n^2 - 12n + 12}\right] \cdot \dfrac{n}{3}$.

Pro která čísla $n$ nemá výraz smysl?

**126.** Jsou dány výrazy:

$$U = \frac{\dfrac{1}{p - 3} - \dfrac{1}{p + 3}}{\dfrac{1}{p - 3} + \dfrac{1}{p + 3}} - \frac{p + 3}{p}, \quad V = \frac{\dfrac{1}{p^2 - 9} - \dfrac{1}{p^2 + 9}}{\dfrac{1}{p^2 - 9} + \dfrac{1}{p^2 + 9}} - \frac{p^2 + 9}{p^2}.$$

Rozhodněte, pro která čísla $p$ nemají výrazy $U$, $V$ smysl a přesvědčte se, že $U = V$.

**127.** Jeden stroj utká $v$ metrů látky za $t_1$ hodin, druhý stroj utká totéž množství látky za $t_2$ hodin. Kolik metrů látky utkají oba stroje za $t$ hodin?

*128. Auto jede z místa A do místa B nejprve $d$ km do kopce rychlostí $v_1$ km/h, potom $u$ km s kopce rychlostí $v_2$ km/h. Jakou průměrnou rychlostí jede na celé trati?

*129. V továrně pracovalo $x$ dělníků. Jednoho dne však přešlo do zemědělství $y$ dělníků. O kolik procent musí zvýšit zbývající dělníci svůj denní výkon, chtějí-li dodržet výrobní plán?

*130. Z dané zásoby $a$ litrů 70% kyseliny bylo vzato $b$ litrů a nahrazeno stejným množstvím vody. Kolikaprocentní kyselina vznikla? Též pro $a = 10$, $b = 2$.

*131. Sukno bylo prodáváno v partiovém obchodě se ztrátou $2\frac{1}{2}$ % z výrobní ceny. Kdyby se prodávalo se ziskem $5\frac{1}{4}$ % z výrobní ceny, získalo by se o $n$ Kčs více, než činila výrobní cena. Jaká byla prodejní cena sukna?

132. Dokažte, že součet čísel $(1 + q)$ a $\left(1 + \frac{1}{q}\right)$ se rovná jejich součinu $(q \neq 0)$.

133. Dokažte, že rozdíl čísel $\left(2 + p + \frac{1}{p}\right)$ a $(1 + p)$ se rovná jejich podílu $(p \neq 0, p \neq -1)$.

134. Je-li $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$, je $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{c}{d} = \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{a}{b}$. Dokažte.

[Návod: $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{d}\right)^2$.]

*135. Určete dva zlomky, jejichž rozdíl se rovná jejich součinu.

136. Ukažte, že platí vztahy:

a) $(a^2 - 1)\left(\frac{1}{a - 1} - \frac{1}{a + 1} - 1\right) = 3 - a^2,\ a \neq 1,\ a \neq -1;$

b) $\left(\frac{1}{1 - a} - 1\right) : \left(a - \frac{1 - 2a^2}{1 - a} + 1\right) = \frac{1}{a},\ a \neq 1,\ a \neq 0;$

c) $1 - \dfrac{a}{1 - \dfrac{a}{a + 1}} = 1 - a - a^2, a \neq -1$.

*137. Ukažte, že pro přípustné hodnoty čísel $x$ a $y$ platí vztahy:

a) $\left(\frac{5y}{y + x} + \frac{5x}{y - x} + \frac{10xy}{y^2 - x^2}\right)\left(\frac{y}{y + x} + \frac{x}{y - x} - \frac{2xy}{y^2 - x^2}\right) = 5;$

b) $\left(\frac{x - y}{x^2 + xy} - \frac{x}{y^2 + xy}\right) : \left(\frac{y^2}{x^3 - xy^2} + \frac{1}{x + y}\right) = \frac{y - x}{y}$.

***138.** Ukažte, že pro přípustné hodnoty čísel $a$, $b$ platí vztahy:

a) $$\left[\frac{a+b}{2(a-b)} - \frac{a-b}{2(a+b)} - \frac{2b^2}{b^2-a^2}\right]\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a};$$

b) $$\left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{a^2+2ab+b^2} + \frac{2}{(a+b)^3}\cdot\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] : \frac{a-b}{a^3b^3} = \frac{ab}{a-b}.$$

***139.** Ukažte, že platí vztah:

$$\left[\left(\frac{r}{s} - \frac{s}{r}\right) : (r+s) + r\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right)\right] : \frac{1+r}{s} = \frac{r-s}{r}.$$

Které podmínky musí být splněny, aby tento výraz měl smysl?

**140.** Je dán zlomek $\frac{a}{b}$ v základním tvaru. Dokažte, že také zlomek $\frac{b-a}{b}$ je v základním tvaru, jsou-li čísla $a$, $b$ přirozená a $b > a$.

**Řešení**

Předpokládejme, že zlomek $\frac{b-a}{b}$ není v základním tvaru.

Potom je $b - a = kp$, $b = kq$, kde čísla $k$, $p$, $q$ jsou přirozená, přičemž $k \neq 1$.

Z uvedených rovnic však plyne vztah $kq - a = kp$, odkud je $a = k(q-p)$. Zlomek $\frac{a}{b}$ je možno psát ve tvaru $\frac{k(q-p)}{kq}$ a lze ho krátit číslem $k \neq 1$.

Tím jsme ovšem došli ke sporu, neboť zlomek $\frac{a}{b}$ byl dán v základním tvaru. Je tedy předpoklad, že zlomek $\frac{b-a}{b}$ není v základním tvaru, nesprávný a platí opak.

Závěr: Je-li $\frac{a}{b}$ zlomek v základním tvaru, je i zlomek $\frac{b-a}{b}$ v základním tvaru.

**141.** Je-li zlomek $\frac{a}{b}$ v základním tvaru, jsou i zlomky $\frac{a+b}{a}$, $\frac{a+b}{b}$ v základních tvarech. Dokažte to.

***142.** Dokažte, že součet dvou zlomků v základním tvaru, jejichž jmenovatelé jsou dvě různá čísla, není nikdy celé číslo.

[Návod: Má platit $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = m$, kde $m$ je celé číslo. Odtud plyne, že součet $(ad + cb)$ musí být dělitelný číslem $b$ i $d$. Je tedy $d = k_1 b$, $b = k_2 d$, $k_1 . k_2 = 1$, $b = d$ proti předpokladu.]

***143.** Je dán výraz $V = \left[\frac{4x}{x^2+4}\left(\frac{2}{x^2-2x}+\frac{x}{2x-4}\right)-\frac{4}{x^2-4}\right] : \frac{x}{x-2}$.

a) Pro která čísla $x$ ztrácí výraz $V$ smysl?

b) Upravte jej a najděte všechna celá čísla $x$, pro která je výraz $V$ roven celému číslu.

***144.** Je dán výraz $V = \left[\frac{a+b}{2a-2b}-\frac{a-b}{2a+2b}+\frac{2b^2}{a^2-b^2}\right] : \frac{4b}{(a^2+b^2)(a-b)}$.

a) Výraz $V$ zjednodušte a udejte, pro která čísla $a$, $b$ nemá smysl.

b) Určete všechny dvojice čísel $a$, $b$, pro která je $V = 10$.

***145.** Je dán výraz $V = \left[\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right] : \left[\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right]$.

a) Udejte, pro která čísla $a$, $b$ nemá výraz $V$ smysl, a potom ho zjednodušte.

b) Určete, pro která čísla $a$, $b$ je $V = 0$, $V > 0$, $V < 0$.

**146.** Zjednodušte:

a) $\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{1+a}}$;

b) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a}}}}$;

c) $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a}}}}$;

d) $\dfrac{b-a}{1+\dfrac{1}{b-a+\dfrac{1}{b-a+\dfrac{1}{b-a}}}}$;

e) $\dfrac{a+b}{1-\dfrac{1}{a+b-\dfrac{1}{a+b-\dfrac{1}{a+b}}}}$.

## 4. LINEÁRNÍ ROVNICE O JEDNÉ NEZNÁMÉ

**147.** Řešte početně i graficky rovnici:

a) $x - 4 = 0$; b) $3x - 1 = x + 1$; c) $-2x + 5 = x - 1$;

d) $\dfrac{2x+9}{3} = \dfrac{2}{3}x - 1$; e) $\dfrac{x}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}(x+2)$.

**148.** Řešte:
$x - 3[x - 5(x - 4)] = 10(x - 3)$.

**149.** $x - 4[x - 2(x + 6)] = 5x + 3$.

**150.** $3x - 2[x - 3(x + 1)] + 4[x + 2(x + 1)] = 19x + 14$.

**151.** $10x - \{6x - 2[3x - 4(1 - x)] - (9x + 8)\} = 27$.

**152.** $(5x - 4)^2 - (5 - 3x)^2 = (3 - 4x)^2$.

**153.** $(6y - 1)^2 - (3y + 3)^2 - 2(y^2 - 1) = (5y - 2)^2$.

**154.** $(2z - 3)^2 + (3z - 4)^2 + (4z - 5)^2 = 29z^2 - 26$.

**155.** $(z - 3)(z + 2) - (z + 2)(z - 4) = 7$.

**156.** $(4u - 1)(9u + 10) = (2u - 3)(18u - 1) + 16$.

**157.** $(2x - 5)(8x - 1) - (4x - 3)^2 = 12(x - 1) - 7$.

**158.** $(3v - 1)^2 - 5(2v + 1)^2 + 2(6v - 3)(v + 1) = (v - 1)^2 + 3(2v - 1)$.

**159.** $(p + 1)^3 - (p - 1)^3 = 6(p + 2)(p - 1) + 9(p + 1) - 9(p - 1)$.

**160.** $\dfrac{7y - 1}{3} + \dfrac{5 + 3y}{2} = 5y - 6$.

**161.** $\dfrac{t + 5}{3} - \dfrac{t}{2} = \dfrac{t - 2}{3} - \dfrac{t - 3}{2}$.

**162.** $v + \dfrac{3 - 7v}{5} = \dfrac{v + 3}{5} - \dfrac{2v - 1}{3}$.

**163.** $\dfrac{6 + 25x}{15} - (x - 1) = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{7}{5}$.

**164.** $2s - \dfrac{5s - 3}{4} = \dfrac{3s - 5}{4}$.

**165.** $\dfrac{3 + 2y}{2} - \dfrac{7}{6} = 5y - \dfrac{12y - 1}{3}$.

**166.** $\dfrac{5x + 1}{6} - \dfrac{7x - 3}{8} = 1 - \dfrac{3x - 1}{4}$.

**167.** $\dfrac{3 - x}{2} - \left(\dfrac{7 - x}{3} - \dfrac{x + 3}{4}\right) + \dfrac{7 - x}{6} - \dfrac{9 + 7x}{8} + x = 0$.

**168.** $\dfrac{9(2x - 9)}{13} + \dfrac{x - 4}{5} = \dfrac{7}{5}(3x - 2) - (3x - 5)$.

**169.** $\dfrac{3(p + 1)}{2} - \left(\dfrac{p + 1}{4} + 1\right) = \dfrac{5p + 1}{7} - \left(\dfrac{3p - 1}{2} - 3\right)$.

170. $\frac{5n+1}{4} + \frac{n-1}{6} + \frac{5n-11}{8} + \frac{4n-1}{9} = 2(n+1)$.

171. $\frac{9x}{8} - \left(\frac{x-2}{6} + \frac{5x-4}{12}\right) - \left(x - \frac{3x+2}{3} - \frac{3x}{4}\right) = 6 + \frac{2x+1}{3}$.

172. $\frac{9n-0{,}7}{4} - \frac{5n-1{,}5}{7} = \frac{7n-1{,}1}{3} - \frac{5(0{,}4-2n)}{6}$.

173. $\frac{2(2-3y)}{0{,}01} - 2{,}5 = \frac{0{,}02-2y}{0{,}02} - 7{,}5$.

174. $1 - \left(a - \frac{1+a}{3}\right) : 3 = \left(2a - \frac{10-7a}{3}\right) : 2$.

175. $x - \frac{1 - \frac{3x}{2}}{4} - \frac{2 - \frac{x}{4}}{3} = 2$.

176. $x + 2 - \frac{2x - \frac{4-3x}{5}}{15} = \frac{7x - \frac{x-3}{2}}{5}$.

177. Která dvě po sobě jdoucí přirozená čísla mají tu vlastnost, že rozdíl jejich druhých mocnin se rovná 15?

$\boxed{178.}$ Boty stály třikrát tolik co přezůvky. Kdyby byly boty levnější o 42 Kčs, byly by dvakrát dražší než přezůvky. Kolik Kčs stály boty a kolik přezůvky?

**Řešení**

Označme $x$ cenu přezůvek v korunách; potom je cena bot $3x$ a platí rovnice $3x - 42 = 2x$, která vede k řešení $x = 42$.

Závěr: Přezůvky stály 42 Kčs a boty 126 Kčs.

Zkouška správnosti: Řešení je správné, neboť vyhovuje podmínkám úlohy.

179. Prodavač v pouličním stánku prodal od rána 600 pohledů po 60 haléřích. Kolik jich musí ještě prodat do večera, aby měl denní tržbu 300 Kčs? Vyhovuje řešení sestavené rovnice úloze?

180. Prémie člena brigády socialistické práce a dělníka činily dohromady za celý rok 6 720 Kčs. Prémie člena brigády za 9 měsíců činily tolik jako prémie dělníka za celý rok. Jak velké byly prémie dělníka a jak velké člena brigády?

181. 15 kusů zboží stálo před zlevněním právě tolik jako 25 kusů téhož zboží po zlevnění. Přitom je cena jednoho kusu po zlevnění o 0,80 Kčs nižší než

před snížením ceny. Kolik stál jeden kus zboží před zlevněním a kolik po zlevnění?

**182.** Brigády na sklizeň brambor se zúčastnilo 48 osob, mezi nimi byli muži, ženy a žáci deváté třídy ZDŠ. Žen bylo o 4 více než mužů, žáků o 6 méně než polovina dospělých. Kolik bylo mužů, kolik žen a kolik žáků?

**183.** Na schůzi mládežníků se dostavilo třikrát tolik chlapců co děvčat. Když 8 chlapců a 8 dívek předčasně ze schůze odešlo, zbývalo pětkrát tolik chlapců co děvčat. Kolik chlapců a kolik děvčat se dostavilo do schůze?

**184.** Žáci jedné třídy měli zaplatit účet za poškození učebny. Rozpis činil 70 haléřů na žáka. Avšak 3 nepřítomní žáci neplatili, a tak musil být udělán nový rozpis, v němž připadlo na každého žáka 75 haléřů. Kolik žáků bylo ve třídě?

**185.** Ve třídě jsou dívky a 30 chlapců. Chlapců prospívá 28, dívky všechny. Kolik je dívek, jestliže všech prospívajících žáků je 95 %?

**186.** Posadí-li se ve třídě 7 žáků do lavice, zbude pro poslední lavici jen jeden žák. Posadí-li se do každé lavice šest žáků, nedostane se na jednoho žáka místo. Kolik je všech žáků?

**187.** Úředník měl měsíční plat 1 200 Kčs. Během roku (po zvýšené kvalifikaci) mu byl plat zvýšen o 10 %, takže obdržel za rok celkem 15 360 Kčs. Kterým měsícem počínaje mu byl vyplácen vyšší plat?

***188.** Na základní devítileté škole je v 1.—5. ročníku 49 % všeho žactva, v 6. ročníku 14 %, v 7. ročníku 13 %, v 8. ročníku o 3 méně než v ročníku sedmém a v 9. ročníku o 5 méně než v osmém. Kolik žáků má škola?

**189.** V hledišti divadla bylo 60 žárovek dvojího druhu. Svícení každou menší z nich stálo za večer 32 haléřů, větší 80 haléřů. Kolik žárovek každého druhu tam bylo, stálo-li osvětlení toho večera 36 Kčs?

**190.** Žáci jedné školy vybrali 130 Kčs za 55 lístků do kina a do divadla. Pokladník školy však zapomněl, kolik měl koupit lístků do kina po 1 Kčs a kolik do divadla po 3,50 Kčs. Spočítáte mu to?

**191.** Jakou zásobu uhlí měla škola, jestliže spotřebovala v měsíci lednu $\frac{1}{4}$ celé zásoby a ještě 0,5 tuny, v měsíci únoru $\frac{1}{6}$ celkové zásoby a ještě 2 tuny a na měsíc březen zbylo 4,5 tuny uhlí?

**192.** V rovnoramenném trojúhelníku je velikost úhlu při hlavním vrcholu o 20° menší než dvojnásobná velikost úhlu při základně. Jak velké jsou úhly tohoto trojúhelníka?

**193.** Ze čtverce se má vystřihnout rám o šířce 3 cm, obsah rámu je 276 cm$^2$. Určete délku strany zbytku.

**194.** Zvětší-li se délka strany čtverce o 2 cm, zvětší se jeho obsah o 100 $cm^2$. Určete délku strany tohoto čtverce.

**195.** Obdélník má délku o 20 cm větší než šířku. Zmenší-li se délka o 5 cm a zvětší-li se šířka o 10 cm, zvětší se obsah obdélníka o 300 $cm^2$. Jak velké jsou rozměry obdélníka?

**196.** V rovnoramenném trojúhelníku je délka ramena o 8 cm větší než délka základny. Určete délku základny, je-li obvod trojúhelníka 31 cm.

**197.** Trojúhelník má obvod 35 cm. Jedna jeho strana má velikost čtyřikrát větší než druhá strana a o jeden cm větší než třetí strana trojúhelníka. Určete velikost těchto stran.

**198.** V trojúhelníku $ABC$ je velikost úhlu $\beta$ třetinou velikosti úhlu $\alpha$ a o 20° větší než velikost úhlu $\gamma$. Určete velikosti úhlů trojúhelníka.

***199.** Za kolik minut po sedmé hodině svírají hodinové ručičky poprvé přímý úhel?

***200.** Přední kolo vozu má obvod 2,1 m, zadní 3,5 m. Jak dlouhá je dráha, na níž učiní zadní kolo o 2 000 otoček méně než kolo přední?

$\boxed{\textbf{201.}}$ Z místa A do místa B je $25\frac{1}{3}$ km. V 6 hodin ráno vyšel chodec S z místa A směrem do místa B. V 7 hodin 10 minut vyšel chodec Z z místa B směrem do místa A. Setkali se v 9 hodin. Kolik ušel průměrně za hodinu každý z obou chodců, jestliže chodec Z ušel za hodinu o 2 km méně než chodec S?

**Řešení**

Označme místo setkání obou chodců P. Jestliže rychlost chůze chodce Z je $x$ km/h, pak rychlost chůze chodce S je $(x + 2)$km/h. Chodec S projde vzdálenost AP za 3 hodiny a urazí přitom $3(x + 2)$ km, kdežto chodec Z projde vzdálenost BP za $1\frac{5}{6}$ hodiny a urazí přitom $1\frac{5}{6} \cdot x$ km. Platí rovnice

$3(x + 2) + 1\frac{5}{6}x = 25\frac{1}{3}$, která vede k řešení $x = 4$.

Závěr: Chodec $Z$ ušel za hodinu průměrně 4 km, chodec $S$ průměrně 6 km.

Zkouška správnosti: Chodec Z ušel za 1 h 50 min $4 \cdot \frac{11}{6}$ km $= 7\frac{1}{3}$ km.
Chodec $S$ ušel za 3 h 18 km.

Celkem tedy urazili celou dráhu z A do B, tj. $25\frac{1}{3}$ km.

**202.** Ze dvou míst A a B, vzdálených 24 km, vyrazí současně proti sobě chodec rychlostí 4 km/h a cyklista rychlostí 12 km/h. Za kolik hodin od okamžiku, kdy vyrazili, a v jaké vzdálenosti od místa A se setkají?

**203.** Loď vyjela v 6 hodin ráno a jela rychlostí 16 mořských mil za hodinu. V 8 hodin 30 minut byl za ní poslán rychlý člun, který jel rychlostí 24 mil/h. Za kolik hodin dohoní člun loď?

**204.** Nákladní auto jelo průměrnou rychlostí 20 km/h a vyjelo z Prahy směrem k Liberci. Současně s ním vyjel autobus, který jel průměrnou rychlostí 30 km/h a který přijel do Liberce o 2 hodiny dříve než nákladní auto. Jaká je vzdálenost mezi Prahou a Libercem?

**205.** Pumpou A se naplní nádrž za 12 minut, pumpou B za 24 minut. Za jakou dobu se naplní nádrž, pracuje-li 3 minuty jen pumpa A a potom obě pumpy současně?

$\boxed{\textbf{206.}}$ Terén měl být upravován tak, aby bylo denně zpracováno 420 m jeho délky. Kdyby se k tomu použilo jen lidských sil, připadla by na dělníka a den úprava terénu o délce 6 metrů. Ke zdolání části úkolu bylo použito tří stejně výkonných mechanických strojů. Potom mohlo být použito o 22 dělníků méně, přičemž připadla na dělníka a den úprava terénu o délce 5 metrů. Určete denní výkon jednoho stroje.

**Řešení**

Uvažujme takto:

Jestliže jeden stroj zpracoval denně terén v délce $x$ metrů, potom tři stroje zpracovaly denně terén v délce $3x$ metrů, takže dělníkům patřila na den úprava terénu v délce $(420 - 3x)$ metrů.

Číslo $\frac{420 - 3x}{5}$ udává počet dělníků, kteří pracovali na úpravě terénu po zavedení strojů, číslo $\frac{420}{6}$ počet dělníků, kteří by byli museli zpracovávat terén beze strojů, takže je zřejmý vztah:

$$\frac{420 - 3x}{5} + 22 = \frac{420}{6}.$$

Rovnici vyhovuje kořen $x = 60$.

Závěr: Jeden stroj zpracoval denně terén v délce 60 metrů.

Zkouška správnosti:

Bez mechanizace by pracovalo 70 dělníků, při použití strojů 48 dělníků. Ti upravili $48 . 5$ m $= 240$ m a stroje 180 m terénu. Celkem tedy 420 m terénu denně.

**207.** Na školním pokusném pozemku vypěstovali žáci ovocné stromky. 25 % jich dala škola místnímu družstvu, $\frac{1}{3}$ z nich dostal pionýrský dům v okresním městě a zbývajících 250 stromků vysadila škola ve své školní zahradě. Kolik stromků vypěstovali žáci té školy?

**208.** V továrně pracuje ve třech odděleních 1 200 dělníků. V prvním oddělení je jich dvakrát tolik co v druhém a ve třetím o 400 více než v prvním. Kolik dělníků je v každém oddělení?

**209.** Nádoba na 30 litrů se má naplnit vodou 60 °C teplou. Kolik litrů vody 80 °C teplé a kolik litrů vody 20 °C teplé musíme smíchat?

**210.** Smísí-li se 5 kg kávy dražší a 10 kg kávy lacinější, má směs cenu 220 Kčs za 1 kg. Kolik stojí 1 kg kávy dražší a 1 kg kávy lacinější, liší-li se jejich ceny o 30 Kčs?

**211.** Kolik gramů kyslíku je v 11 gramech kysličníku uhličitého $CO_2$? (Poměrná atomová hmotnost kyslíku je 16, uhlíku 12.)

**212.** Jakou hustotu má kov, jestliže nádobu z něho udělanou vyvážíme na vzduchu závažím 8,16 kg a ve vodě závažím 5,36 kg?

## 5. LINEÁRNÍ ROVNICE S NEZNÁMOU VE JMENOVATELI

**213.** Řešte rovnici $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{3x-10}{x^2-5x+6}$.

**Řešení**

Nejprve upravme danou rovnici na tvar

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} = \frac{3x-10}{(x-2)(x-3)}.$$

Za předpokladu, že vyloučíme z řešení čísla $x = 2$, $x = 3$, je daná rovnice ekvivalentní s rovnicí

$$x - 3 - (x - 2) = 3x - 10\,,$$

které vyhovuje kořen $x = 3$.

Avšak číslo $x = 3$ nemůže být kořenem dané rovnice, neboť pro $x = 3$ nemají zlomky $\dfrac{1}{x-3}$ a $\dfrac{3x-10}{x^2-5x+6}$ smysl.

Závěr: Daná rovnice nemá řešení.

**214.** Řešte rovnici $\dfrac{x^2}{x+1} - x = \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x^2}{x^2+x}$.

**Řešení**

Vyloučíme-li z řešení čísla $x = 0$, $x = -1$, je daná rovnice ekvivalentní s rovnicí

$$x^2 - x^2 - x = x - 2x\,,$$

které vyhovuje každé číslo $x$.
Závěr: Dané rovnici vyhovují všechna čísla $x \neq 0$, $x \neq -1$.

**215.** Řešte rovnici $\dfrac{3x - 3}{2x^2 - 2} - \dfrac{5(x - 1)}{12(x - 1)^2} = \dfrac{2x + 2}{3x^2 + 6x + 3}$.

**Řešení**

Upravme danou rovnici na tvar

$$\frac{3(x - 1)}{2(x^2 - 1)} - \frac{5(x - 1)}{12(x - 1)^2} = \frac{2(x + 1)}{3(x + 1)^2}.$$

Jestliže vyloučíme z řešení čísla $x = 1$, $x = -1$, obdržíme po krácení zlomků rovnici $\dfrac{3}{2(x + 1)} - \dfrac{5}{12(x - 1)} = \dfrac{2}{3(x + 1)}$,
která je ekvivalentní s rovnicí $18(x - 1) - 5(x + 1) = 8(x - 1)$ za předpokladu, že $x \neq 1, x \neq -1$.
Této rovnici i dané rovnici vyhovuje kořen $x = 3$.

Zkouška: $\dfrac{3x - 3}{2x^2 - 2} - \dfrac{5(x - 1)}{12(x - 1)^2} = \dfrac{6}{16} - \dfrac{10}{48} = \dfrac{18}{48} - \dfrac{10}{48} = \dfrac{8}{48} = \dfrac{1}{6}$;

$$\frac{2x + 2}{3x^2 + 6x + 3} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}.$$

Závěr: Dané rovnici vyhovuje kořen $x = 3$.

O správnosti řešení se přesvědčíme ve všech případech dosazením řešení do původní rovnice.

**216.** Řešte:

$$\frac{1}{x - 2} - \frac{2}{3(x - 2)} = \frac{1}{3}.$$

**217.** $\dfrac{6}{x - 5} + 1 = \dfrac{2x - 4}{x - 5}$.

**218.** $1 + \dfrac{x}{1 - 2x} = \dfrac{x + 3}{2x + 1}$.

**219.** $\dfrac{2z + 3}{z + 12} = \dfrac{2z + 9}{z + 22}$.

220. $\dfrac{1{,}1 - 0{,}1x}{1{,}2x - 0{,}2} = \dfrac{1{,}01 - 0{,}01x}{0{,}12x - 1{,}82}$.

221. $\dfrac{5}{x + 1} - 7 = \dfrac{10 - 7x}{x - 1}$.

222. $\dfrac{(x + 1)^3}{x^3} - \dfrac{(x + 1)^2}{x^2} = \dfrac{1}{x}$.

223. $\dfrac{3}{v + 1} = \dfrac{2}{v + 3} + \dfrac{1}{v - 2}$.

224. $\dfrac{2}{y - 3} - \dfrac{1}{y + 2} = \dfrac{1}{y + 6}$.

225. $\dfrac{1}{m - 3} - \dfrac{1}{m + 2} = \dfrac{5}{m^2 + 6}$.

226. $\dfrac{x}{x^2 - x - 12} + 2 + \dfrac{11 + 3x}{x + 3} = \dfrac{5x}{x - 4}$.

*227. $\dfrac{r + 2}{r - 2} - 1 = \dfrac{3r^2 + r + 9}{3(r^2 - 4)} - \dfrac{r - 2}{r + 2}$.

228. $\dfrac{2x + 19}{5x^2 - 5} - \dfrac{3x}{1 - x} = 3 + \dfrac{17}{x^2 - 1}$.

229. $\dfrac{3x}{x - 2} + \dfrac{1}{2 - x} + 1 = \dfrac{3x + 3}{x - 2} + \dfrac{4}{2 - x}$.

230. $\dfrac{1}{x^2 + x} + \dfrac{1}{x^2 - x} + \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 1} = 1$.

231. $\dfrac{2}{1 - x^2} - \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{1}{1 - x}$.

232. $\dfrac{(2 - x)^3 + (x - 1)^3}{(2 - x)^2 + (1 - x)^2} = \dfrac{3}{2}$.

233. $\dfrac{5}{2y - 3} + \dfrac{3y + 8}{4y - 6} = 1\dfrac{1}{6} - \dfrac{6y - 2}{10y - 15}$.

*234. $\dfrac{3}{(2x + 5)^2} + \dfrac{4}{(2x + 1)^2} = \dfrac{7}{4x^2 + 12x + 5}$.

*235. $\dfrac{3}{1 - z^2} = \dfrac{2}{(1 + z)^2} - \dfrac{5}{(1 - z)^2}$.

**236.** $$\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}-x}+\frac{8}{3}=0\,.$$

**237.** $$\frac{\frac{y}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{y}{3}-\frac{3}{4}}=\frac{y+3}{y-4}\,.$$

**238.** $$\frac{\frac{x}{3}-\frac{1}{12}}{\frac{x}{4}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{x}{21}-\frac{1}{4}}{\frac{x}{28}-\frac{1}{6}}\,.$$

**239.** $$\frac{\frac{z}{2}-2}{z-1}+\frac{\frac{z}{2}+2}{z+1}=1\,.$$

**240.** $$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+x}=\frac{4}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{x+\frac{2}{3}}\,.$$

**241.** $$\frac{\frac{2y}{3}-\frac{1}{3}}{\frac{3y}{2}-1}+\frac{\frac{5y}{3}-\frac{4}{3}}{y-\frac{2}{3}}=2\,.$$

***242.** $$\frac{96}{x^2-16}=\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}}-\frac{3-\frac{1}{x}}{\frac{4}{x}-1}-5\,.$$

***243.** $$\frac{1}{\frac{(3-2x)^2}{4}}-\frac{1}{\frac{(3+2x)^2}{4}}=\frac{\frac{1}{3+2x}}{\frac{3-2x}{3}}\,.$$

**244.** Které číslo je nutno přičíst k čitateli a jmenovateli zlomku $\frac{2}{3}$, aby se změnil na zlomek $\frac{3}{2}$?

**245.** Cyklista jede rychlostí 20 km/h. O kolik km/h musí zvýšit svou rychlost, aby projel dráhu 84 km za 3 hodiny?

**246.** Z místa A vyjel autobus směrem do místa B v 6 hodin ráno. V 8 hodin 40 minut vyjelo z místa A auto týmž směrem. Obě vozidla dorazila do místa B současně. Jakou rychlostí jela, je-li vzdálenost obou míst 160 km a rychlost auta dvakrát větší než rychlost autobusu?

**247.** Výmlat obilí z pozemku patřícímu JZD se prováděl třemi stroji rozdílné výkonnosti a trval celkem dva dny. Kdyby se výmlat prováděl jen strojem nejmenší výkonnosti, trval by devět dní, kdyby se prováděl jen strojem s největší výkonností, trval by čtyři a půl dne. Jak dlouho by prováděl výmlat třetí stroj?