III. ČÍSLA REÁLNÁ

I. ČÍSLA RACIONÁLNÍ A IRACIONÁLNÍ

1. Počítejte zpaměti:
   a) Teploměr ukazoval ráno 2 °C, v poledne stoupl o 5 °C, večer klesl o 10 °C. Kolik stupňů ukazoval večer?
   b) Hladina řeky byla prvý den v týdnu 6 cm nad normálem, druhý den klesla o 8 cm, třetí den klesla o 2 cm a čtvrtý den stoupla o 3 cm. Jak vysoko stála vodní hladina čtvrtý den vzhledem k normálu? Znázorněte též na číselné ose.
   c) Olovo se taví při 332 °C, rtuť mrzne při teplotě o 371 °C nižší. Při kolika °C mrzne rtuť?
   d) Od založení Říma až do roku 1966 uplynulo 2 719 let. Kdy byl Řím založen?

2. Praha má zeměpisnou délku 14°25′57″ východní délky od Greenwiche. Lisabon leží od Prahy o 23°36′57″ na západ. Jaká je zeměpisná délka Lisabonu?

3. Jaký je rozdíl zeměpisných šířek Prahy (50°5′19″ s. š.) a Rio de Janeira (22°55′ j. š.)?

4. Znázorněte na číselné ose obrazy racionálních čísel -3; 5; -7; 2; -4; 4 a vypočítejte zpaměti, oč je větší a) číslo 5 než číslo -3, b) číslo 2 než číslo -7, c) číslo 4 než číslo -4.

5. Znázorněte na číselné ose obrazy racionálních čísel $5\frac{1}{2}$; $-7\frac{1}{2}$; $-2\frac{2}{5}$; $1\frac{1}{5}$; $-6\frac{1}{2}$; $4\frac{3}{5}$ a vypočítejte zpaměti, oč je menší
   a) číslo $-7\frac{1}{2}$ než číslo $5\frac{1}{2}$; b) číslo $-2\frac{2}{5}$ než číslo $1\frac{1}{5}$; c) číslo $-6\frac{1}{2}$ než číslo $4\frac{3}{5}$.

6. Které číslo je o $4\frac{1}{4}$ menší než číslo $2\frac{3}{4}$? Znázorněte na číselné ose.

7. Určete aritmetický průměr čísel (-2) a 3 a zaznamenejte jeho obraz na číselné ose. Jakou polohu má tento obraz na úsečce, jejímiž koncovými body jsou obrazy daných čísel?

8. Znázorněte na číselné ose obrazy čísel $-5\frac{1}{4}$ a $6\frac{1}{2}$ a vyznačte na ní obrazy všech celých čísel, která leží mezi nimi. Stanovte aritmetický průměr těchto celých čísel.

9. Které z čísel $(-2)^2$, $-(2)^2$, $-(3)^2$ je největší a které nejmenší? Znázorněte na číselné ose.

10. Je-li m libovolné přirozené číslo, kolik přirozených čísel leží mezi číslem $(m - 1)$ a $(m + 6)$?

11. Ukažte na ose číselné, že platí:

a) $4 + (-5) + \frac{3}{2} = 4 + \frac{3}{2} + (-5)$;

b) $(5 - 3) + 4\frac{1}{2} = (5 + 4\frac{1}{2}) - 3$.

Které zákony tu ověřujete?

12. Převeďte na zlomky desetinné:

a) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{3}{2^2 . 5}$, $\frac{21}{2 . 5^2}$, $\frac{17}{2^3 . 5}$,

$\frac{31}{2^3 . 5^2}$, $1\frac{3}{5}$, $\frac{\frac{2}{5}}{16}$;

b) $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{33}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{17}{90}$, $\frac{233}{990}$, $\frac{43}{165}$.

Které z nich se dají psát ve tvaru ukončeného desetinného čísla, které jsou ryze a které neryze periodické?

13. Dokažte, že zlomek, jehož jmenovatel je 5^n, kde n je libovolné přirozené číslo, lze psát ve tvaru ukončeného desetinného čísla.

14. Dokažte, že zlomek, jehož jmenovatel je 2^n, kde n je libovolné přirozené číslo, lze psát ve tvaru ukončeného desetinného čísla.

15. Dokažte, že zlomek, jehož jmenovatel je $2^n . 5^m$, kde n, m jsou libovolná čísla přirozená, lze psát ve tvaru ukončeného desetinného čísla.

16. Napište ve tvaru desetinných čísel zlomky $\frac{1}{5}$ a $\frac{2}{3}$, výsledky sečtěte a porovnejte s desetinným zápisem součtu zlomků:

a) $\frac{2}{5} + \frac{5}{12}$; b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$; c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

17. Převeďte na zlomky obyčejné tato desetinná čísla:

0,12; 0,75; 3,8; 23,45; 1,05.

18. Převeďte ryze periodický desetinný zlomek $0,\overline{324}$ na zlomek obyčejný.

Řešení

$0,\overline{324} = 0,324\,324\,324 \ldots\ldots\ldots$ (1)

Násobíme-li obě strany rovnice (1) číslem 10^3, dostaneme rovnici

$1\,000 \,.\, 0,\overline{324} = 324,324324 \ldots\ldots\ldots$ (2)

Odečteme-li od rovnice (2) rovnici (1), dospějeme k rovnici

$999 \,.\, 0,\overline{324} = 324$, odkud je $0,\overline{324} = \dfrac{324}{999} = \dfrac{12}{37}$.

Správnost výsledku snadno ověříme obrácením postupu:

$\dfrac{12}{37} = 12 : 37 = 0,\overline{324}$.

Závěr: $0,\overline{324} = \dfrac{12}{37}$.

19. Převeďte neryze periodický desetinný zlomek $0,2\overline{37}$ na zlomek obyčejný.

Řešení

$0,2\overline{37} = 0,237\,37\,37 \ldots\ldots\ldots$ (1)

Znásobíme-li obě strany rovnice (1) nejprve číslem 10^3 a potom číslem 10^1, dostaneme rovnice

$1000 \,.\, 0,2\overline{37} = 237,373737 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (2)

$10 \,.\, 0,2\overline{37} = 2,373737 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (3)

Odečteme-li dále od rovnice (2) rovnici (3), dospějeme k rovnici

$990 \,.\, 0,2\overline{37} = 235$, odkud je $0,2\overline{37} = \dfrac{235}{990} = \dfrac{47}{198}$.

Výsledek je správný, neboť $\dfrac{47}{198} = 47 : 198 = 0,2\overline{37}$.

Závěr: $0,2\overline{37} = \dfrac{47}{198}$.

20. Převeďte na obyčejné zlomky:

a) $0,\overline{27}$; b) $0,\overline{6}$; c) $2,\overline{345}$; d) $0,\overline{1234}$; e) $0,7\overline{2}$; f) $0,1\overline{36}$; g) $0,7\overline{27}$; h) $3,39\overline{85}$.

21. Proveďte:

a) $0,\overline{4} + 0,\overline{12}$; $0,\overline{7} + 0,\overline{35}$; $0,\overline{47} + 0,\overline{023}$;

b) $0,\overline{47} + 0,0\overline{23}$; $0,5\overline{354} + 0,\overline{85}$; $2,\overline{35} - 1,\overline{231}$; $1,\overline{25} - 0,\overline{773}$.

***22.** Proveďte:

a) $1,\overline{2} \,.\, 1,\overline{18}$; b) $0,\overline{32} \,.\, 1,\overline{3}$.

***23.** Řešte rovnici:

a) $0,\overline{25}x + 0,\overline{31}x = 1,\overline{13}$;

b) $2,\overline{64}x - 3,\overline{48} = 1,\overline{48}x$.

24. O kolik procent je číslo 0,28 menší než číslo $0,\overline{28}$?

25. Určete druhé mocniny čísel 73, 86, 59, 92, 99, 29. K výpočtu užijte vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ nebo vzorce $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. [Návod: Např. $29^2 = (20 + 9)^2$ nebo $29^2 = (30 - 1)^2$.]

26. Vyhledejte v tabulkách druhých mocnin:

a) $3,4^2$; 62^2; 870^2; $0,26^2$; $0,048^2$;

b) $6,28^2$; $38,9^2$; 952^2; $4\,380^2$; $0,733^2$;

c) $2,452^2$; $29,84^2$; $0,358\,8^2$; $0,045\,79^2$.

27. Z tabulek vyhledejte druhé mocniny čísel 36, 73, 24, 87, 92 a pomocí výsledků vypočítejte: 364^2, 736^2, 247^2, 875^2, 925^2.

28. Jako mocninu trojčlenu určete: a) 111^2; b) 109^2.

29. Proveďte a) zpaměti: 3^4, 4^4, 5^4, $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; b) písemně: 45^4, $6,1^4$, $0,24^4$.

30. Vyhledejte v tabulkách třetích mocnin:

a) 17^3; $2,8^3$; 52^3; $0,43^3$; $0,74^3$;

b) 231^3; $3,16^3$; $74,2^3$; 855^3; $49,6^3$;

c) $112,2^3$; $2,356^3$; $132,6^3$.

31. Rozhodněte, kterými číslicemi mohou být zakončeny a) druhé mocniny, b) třetí mocniny přirozených čísel.

32. Stanovte hodnoty těchto výrazů:

a) $54,8^2 - 9$; $2,37^2 + 0,016$; $0,324^2 + \frac{7}{8}$;

b) $9,24^2 + 1,3^2$; $2,64^2 - 1,58^2$;

c) $0,32^2 + 1,3^2 + 11,1^2$; $0,23^2 + 0,634^2 - \frac{9}{20}$;

d) $1,5^3 - 0,25^2$; $12,1^3 + 3,4^2 - \frac{2}{5}$.

33. Jak zjistíte výhodně hodnoty výrazů:

a) $1{,}6^2 - 0{,}7^2$; b) $24{,}8^2 - 21{,}2^2$; c) $7{,}36^2 - 6{,}26^2$;
d) $0{,}3^2 \,.\, 0{,}05^2$; e) $1{,}2^2 \,.\, 0{,}8^2$; f) $5{,}64^2 : 0{,}6^2$;
g) $1{,}3^2 \,.\, 0{,}3^2 - 0{,}38^2$.

34. Proveďte:

a) $\left(4\frac{2}{3} + 2\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{5} - (3{,}5^2 - 2{,}3^2) \,.\, 3{,}25$;

b) $(9{,}25^2 - 6{,}15^2)^2 - (8{,}35^2 - 6{,}65^2)^2$;

c) $\dfrac{15{,}65^2 - 9{,}35^2 + 2^5 + 10{,}5}{25{,}74^2 - 14{,}26^2 - 2^8 - 2^5 : 10}$.

$\boxed{\textbf{35.}}$ Dokažte, že $\sqrt{3}$ je iracionální číslo. Stanovte dále její přibližnou hodnotu na 3 desetinná místa a) aproximováním, b) odmocňováním a zkontrolujte výsledek pomocí tabulek.

Řešení

1. $\sqrt{3}$ není číslo přirozené, jelikož neexistuje takové přirozené číslo, jehož druhá mocnina by se rovnala číslu 3.

2. $\sqrt{3}$ není zlomkem tvaru $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou přirozená čísla navzájem nesoudělná a $q \neq 1$. Důkaz tohoto tvrzení provedeme nepřímo takto:

   Předpokládejme, že $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, kde zlomek $\frac{p}{q}$ má uvedené vlastnosti, a je tedy v základním tvaru.

   Potom platí vztah $\frac{p^2}{q^2} = 3$,

   přičemž zlomek $\frac{p^2}{q^2} = \frac{p \cdot p}{q \cdot q}$ je také v základním tvaru (jak se dá snadno dokázat), neboť čísla p^2, q^2 jsou nesoudělná a $q^2 \neq 1$.

Vzniklý spor (zlomek v základním tvaru s jmenovatelem různým od 1 se nemůže rovnat číslu 3) ukazuje, že předpoklad nebyl správný, z čehož plyne, že $\sqrt{3}$ není zlomkem tvaru $\frac{p}{q}$.

Závěr: $\sqrt{3}$ není číslem přirozeným, není zlomkem, není tedy číslem racionálním.

a) Určeme dále přibližnou hodnotu $\sqrt{3}$ na 3 desetinná místa aproximováním.

   Postupně platí:

   $1 < \sqrt{3} < 2$, neboť $1 < 3 < 4$;

$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, neboť $2{,}89 < 3 < 3{,}24$;
$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$, neboť $2{,}992\,9 < 3 < 3{,}027\,6$;
$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, neboť $2{,}999\,824 < 3 < 3{,}003\,289$;
$1{,}732\,0 < \sqrt{3} < 1{,}732\,1$, neboť $2{,}999\,824\,00 < 3 < 3{,}000\,170\,41$.
Závěr: $\sqrt{3} \doteq 1{,}732$.

b) Určeme $\sqrt{3}$ na 3 desetinná místa odmocňováním.

$\sqrt{3} = 1{,}732\,0 \ldots$
200 : 27 . 7
1100 : 343 . 3
7100 : 3462 . 2
17 600 : 3464

Závěr: $\sqrt{3} \doteq 1{,}732$.

Přesnější hodnota uváděná v matemat. tabulkách:
$\sqrt{3} = 1{,}732\,050\,81$.

36. Dokažte, že $\sqrt{5}$ je číslo iracionální.

37. Dokažte, že $(\sqrt{2} - 1)$ je číslo iracionální.

38. Dokažte, že číslo $5\sqrt{2}$ je číslo iracionální.

39. Jestliže přirozené číslo m není druhou mocninou žádného přirozeného čísla, potom $\sqrt{m}$ je číslo iracionální. Dokažte to.

40. Znázorněte na číselné ose obrazy čísel $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.
[Návod: $\sqrt{2}$ je délka úhlopříčky čtverce, jehož strana je 1, $\sqrt{3}$ je délka dvojnásobné výšky rovnostranného trojúhelníka, jehož strana je 1, $\sqrt{5}$ je velikost přepony pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny jsou 1 a 2.]

41. Uspořádejte podle velikosti čísla: $1{,}414$; $1{,}\overline{414}$; $1{,}41\overline{4}$; $1{,}41\overline{4}$; $\sqrt{2}$.

42. $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Vypočítejte hodnoty těchto funkcí na 5 desetinných míst a zkontrolujte si výsledky s hodnotami, které jsou uvedeny v tabulkách.

43. Proveďte:

a) $\sqrt{64} + \sqrt{36}$; b) $\sqrt{64 + 36}$; c) $\sqrt{64} + 36$; d) $64 + \sqrt{36}$.

44. Určete:

a) $\sqrt{10}$; b) $\sqrt{50}$; c) $\sqrt{1\,000}$; d) $\sqrt{6{,}98}$; e) $\sqrt{77{,}52}$; f) $\sqrt{761{,}2}$;
g) $\sqrt{9\,868}$; h) $\sqrt{0{,}135\,0}$; i) $\sqrt{0{,}035\,30}$; j) $\sqrt{3{,}803}$; k) $\sqrt{22{,}85}$.

45. Určete z tabulek:

a) $\sqrt[3]{5}$; b) $\sqrt[3]{10}$; c) $\sqrt[3]{50}$; d) $\sqrt[3]{100}$; e) $\sqrt[3]{500}$; f) $\sqrt[3]{6{,}582}$; g) $\sqrt[3]{34{,}99}$;

h) $\sqrt[3]{495{,}3}$; i) $\sqrt[3]{6\,582}$; j) $\sqrt[3]{34\,990}$; k) $\sqrt[3]{0{,}006\,053}$; l) $\sqrt[3]{0{,}049\,52}$;

m) $\sqrt[3]{0{,}540\,1}$.

46. Obdélník má rozměry 15,2 cm a 9,5 cm. Udejte velikost strany čtverce stejného obsahu.

47. Čtvercová síň je vyložena 4 900 čtvercovými dlaždicemi, z nichž každá má obsah 225 cm^2. Udejte rozměry síně.

48. Je dána krychle, jejíž hrana má délku 6 cm. Určete délku hrany krychle, která má povrch pětkrát větší.

49. Určete délku hrany krychle, jejíž objem je a) dvakrát, b) pětkrát tak velký jako objem krychle o hraně délky 6 cm.

50. Jsou dány dva čtverce, jejichž obsahy jsou 29,4 cm^2 a 48,5 cm^2. O kolik cm je délka strany druhého čtverce větší než délka strany čtverce prvého?

51. Určete délku strany čtverce, jehož obsah je roven součtu obsahů dvou čtverců, jejichž délky stran jsou $a = 6{,}25$ dm, $b = 7{,}43$ dm.

52. Určete tloušťku bukového trámu ($\varrho = 0{,}7$ g/cm^3) čtvercového průřezu, délky 4 m, jehož hmotnost je 175 kg. (Objem $V = a^2 . v$, kde a je strana čtvercového průřezu a v délka trámu.)

53. Vyhledejte z některých přesnějších tabulek hodnoty čísel π a $\frac{1}{\pi}$ a zaokrouhlete je na 7 desetinných míst.

54. Který z výrazů se nejvíce blíží číslu π:

a) $\sqrt{4 + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2}$; b) $\frac{3}{5}(3 + \sqrt{5})$; c) $0{,}26\sqrt{146}$?

55. U malých transformátorů se počítá s proudovým zatížením měděných vodičů 2 A/mm^2 (tj. proud 2 A na každý čtverečný milimetr průřezu měděného vodiče). Jaký průměr ($\emptyset$) drátu s kruhovým průřezem musíme volit při proudu a) 1 A, b) 0,5 A, c) 2 A?

56. Objem rovnostranného válce je 74π cm^3. Určete velikost jeho poloměru. (Objem $V = 2\pi r^3$; $v \doteq 2r$.)

57. Určete velikost poloměru koule, jejíž povrch je
a) $21{,}81\pi$ cm^2, b) 54,85 cm^2. (Povrch $S = 4\pi r^2$.)

58. Určete velikost hrany krychle, která má stejný objem jako koule o poloměru r. $\left(\text{Objem koule } V = \frac{4}{3}\pi r^3.\right)$

59. Určete velikost poloměru koule, jejíž objem se rovná 1 m^3.

60. Určete uspořádanou dvojici čísel $[x, y]$, která řeší soustavu
$5x + 4y = 14, 97y - 99x = 28$.
Je $x \doteq \sqrt{2}, y \doteq \sqrt{3}$? Mohou tvořit řešení této soustavy čísla iracionální?

2. NEROVNOSTI

61. Jaké geometrické útvary vyplňují na číselné ose obrazy čísel x, pro něž platí: a) $x \geqq 5$, b) $x > 3$, c) $x < 1$, d) $x \leqq -2$, e) $-5 < x < 4$, f) $-8 \leqq x < 6$, g) $0 \leqq x \leqq 2{,}5$?

62. Jaké útvary vyplňují na číselné ose obrazy čísel $x \neq 2$?

63. Na číselné ose vyznačte obrazy všech přirozených čísel x, pro něž platí: $\frac{1}{2} < x \leqq 5$.

64. Jak umístíte na číselné ose, na které není ještě zvolen počátek, obrazy čísel x a y, víte-li, že platí $x < y$? Jaký geometrický útvar vyplní obrazy všech čísel y při pevně zvoleném obrazu čísla x?

65. Za a, b, c volte libovolná určitá čísla a ověřte si tak správnost pouček: a) Je-li $a < b$, je $a + c < b + c$, b) je-li $a < b$, je $-a > -b$. Využijte též číselné osy.

66. Platí-li $0 < a < 1$, co platí o čísle $\frac{1}{a}$?

Platí-li $-1 < \frac{1}{a} < 0$, co platí o čísle a?

67. Co mo[illegible] i o znamení čísel a, b, jestliže platí:

a) $a + b > 0$, b) $ab > 0$, c) $\frac{a}{b} < 0$, d) $\frac{a}{b} > 0$?

68. Za kterých podmínek platí, že součet $a + b$ je a) menší než jeden sčítanec, b) menší než kterýkoli sčítanec? Kdy je součin ab menší než kterýkoli činitel?

69. U[illegible]ete, které z těchto nerovností jsou ekvivalentní:

a) $[illegible]x + 3 > 3p + 2$; b) $px > 4, p > 0$;

c) $2x - 3p + 1 > 0$; d) $x > \frac{4+p}{p} - 1$; $p > 0$;

e) $\frac{3}{2}p - x < \frac{1}{2}$; f) $3p - 2x > 2$; g) $p^2x < 4p$.

70. Číslem c násobte obě strany nerovnosti:

a) $\frac{1}{2} > -1$, $c = 6$; b) $-\frac{1}{2} > -1$, $c = -6$;

c) $a^2 > b$, $b < 0$, $c = b$; d) $x^3 < x^2$, $c = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

71. Zvolte na číselné ose s počátkem P obrazy dvou libovolných kladných čísel a, b, přičemž $a > b$. Jakou polohu na číselné ose má obraz čísla $\frac{a+b}{2}$ vzhledem k číslům a, b? Jaký vztah platí mezi čísly a, b, $\frac{a+b}{2}$?

72. Pro která čísla b je $\frac{a+b}{2} > a$?

73. Pro která čísla a je $\frac{a-b}{2} > b$?

74. Pro která čísla a má zlomek $\frac{3a-2}{4}$ hodnotu větší než 1?

75. Pro která přirozená čísla a má zlomek $\frac{5a-4}{3}$ hodnotu menší než 1?

Vyznačte obrazy všech čísel a udané vlastnosti na číselné ose.

76. Jaký vztah platí mezi součiny ac, bd, jestliže čísla a, b, c, d jsou a) kladná, b) záporná a v obou případech je $a < b$, $c < d$?

77. Mezi vzdálenostmi a, b předmětu a obrazu od čočky nebo kulového zrcadla platí vztah $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, kde f je velikost ohniskové dálky přístroje. Určete nerovnost pro b, jestliže platí: a) $a > 2f$; b) $f < a < 2f$, $a > 0$; c) $0 < a < f$.

78. Je dán pravý zlomek $\frac{a}{b}$, přičemž je $a > 0$, $b > 0$. Přičteme-li k čitateli i jmenovateli tohoto zlomku totéž číslo $c > 0$, zůstává zlomek pravý. Dokažte to.

79. Jsou-li a, b reálná čísla a $a < b$, potom platí $a < \frac{a+b}{2} < b$. Dokažte.

80. Jsou-li a, b, c, d kladná čísla a platí-li nerovnost $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, pak platí také nerovnost $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Dokažte.

81. Jsou-li a, b reálná čísla, dokažte, že platí:

a) $a^2 + \frac{1}{a^2} \geqq 2;\ a \neq 0;$ b) $\frac{4a + 3}{1 + a^2} \leqq 4;$

c) $a^2 + b^2 \geqq 2ab;$ d) $a^2 + b^2 \geqq ab\,.$

82. Je-li $p > 0$, $q > 0$, dokažte, že platí:

a) $(p + q)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \geqq 4\,;$

b) $\frac{p^2 + q^2}{2} \geqq \left(\frac{p + q}{2}\right)^2.$

83. a) Platí-li mezi reálnými čísly m, n, p, q nerovnost $mp + nq > mq + np$, pak je $m > n$, $p > q$ nebo $m < n$, $p < q$.

b) Je-li $m > n$, $p > q$ nebo $m < n$, $p < q$, přičemž m, n, p, q jsou reálná čísla, pak platí nerovnost $mp + nq > mq + np$. Dokažte to.

Řešení

a) Upravujme postupně nerovnost $mp + nq > mq + np$ takto:

$mp + nq - mq - np > 0\,,$
$m(p - q) - n(p - q) > 0\,,$
$(p - q)(m - n) > 0.$ .... (1)

Nerovnost (1) je ekvivalentní s nerovností $mp + nq > mq + np$ a je splněna tehdy, je-li $p - q > 0$, $m - n > 0$ nebo $p - q < 0$, $m - n < 0$, tedy pro $p > q$, $m > n$ nebo $p < q$, $m < n$.

b) Je-li $p > q$, $m > n$, je $p - q > 0$, $m - n > 0$ a součin $(p - q) . (m - n) > 0$; z této nerovnosti ekvivalentními úpravami plyne nerovnost $mp + nq > mq + np$.

Je-li $p < q$, $m < n$, je $p - q < 0$, $m - n < 0$ a součin $(p - q) . (m - n) > 0$. Z této nerovnosti plyne nerovnost $mp + nq > mq + np$.

Závěr: Obě věty jsou platné. Věta b) je obrácená k větě a).

84. Dokažte, že pro všechna reálná čísla p, q platí:
$p^4 + q^4 \geqq (p^2 + q^2) . pq\,.$

Řešení

Upravujme postupně danou nerovnost takto:

$p^4 + q^4 \geqq (p^2 + q^2)pq,$ .... (1)
$p^4 + q^4 - pq(p^2 + q^2) \geqq 0\,,$
$p^4 + q^4 - p^3q - pq^3 \geqq 0\,,$
$p^3(p - q) - q^3(p - q) \geqq 0\,,$

$$(p - q)(p^3 - q^3) \geqq 0\,,$$
$$(p - q)(p - q)(p^2 + pq + q^2) \geqq 0\,,$$
$$(p - q)^2\left[\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}q^2\right] \geqq 0\,. \qquad (2)$$

Nerovnosti (2) a (1) jsou ekvivalentní, nerovnost (2) je však splněna pro všechna reálná čísla p, q, neboť $(p - q)^2 \geqq 0$, $\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}q^2 \geqq 0$.

Stačí tedy postup obrátit, tj. vyjít z nerovnosti (2) a dospět ekvivalentními úpravami k nerovnosti (1), aby daný vztah byl dokázán.

Závěr: Jsou-li p, q reálná čísla, platí mezi nimi vztah
$$p^4 + q^4 \geqq (p^2 + q^2)pq\,.$$

85. Dokažte, že pro reálná čísla a, b, c platí vztah:
a) $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + ac + bc$;
[Návod: Obě strany nerovnosti násobte dvěma, potom nerovnost anulujte a upravte na součet druhých mocnin.]
b) $a^2 + b^2 + c^2 \geqq 2(ab + ac + bc) - 3$;
c) $(a + b + 2c)^2 \geqq 4(ab + ac + bc)$.

86. Dokažte, že pro reálná čísla a, b, c, d platí vztah
$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geqq 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)\,.$$

87. Je-li $p > 0$, $q > 0$, dokažte, že platí:
a) $(p + q)(pq + 1) \geqq 4pq$;
[Návod: Danou nerovnost upravte na tvar $q(p - 1)^2 +$ $+ p(q - 1)^2 \geqq 0$.]
b) $\dfrac{p^3 + q^3}{2} \geqq \left(\dfrac{p + q}{2}\right)^3$.

88. Dokažte, že pro všechna čísla $a > 0$ platí:
$a^3 + 1 \geqq a + a^2$.

89. Jsou-li čísla a, b přirozená a platí-li $\dfrac{a^2}{b^2} < 2$, pak platí také $\left(\dfrac{a + 2b}{a + b}\right)^2 > 2$.
Dokažte.

***90.** Je-li $a > 0$, $b > 0$, potom $a^{10} + b^{10} \leqq \dfrac{a^{11}}{b} + \dfrac{b^{11}}{a}$. Dokažte.
[Návod: Nerovnost upravte na tvar $(a - b)(a^{11} - b^{11}) \geqq 0$ a sledujte případy $a = b$, $a > b$, $a < b$.]

***91.** Dokažte, že pro každou trojici kladných čísel a, b, c platí vztah
$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqq 9\,.$$
Kdy nastane rovnost?

92. V praxi se často používá tzv. průměrných hodnot vytvořených z několika hodnot naměřených nebo pozorovaných. Tak např. aritmetický průměr čísel p, q je $\frac{p+q}{2}$, geometrický průměr $\sqrt{pq}$, harmonický průměr

$$\frac{pq}{\frac{p+q}{2}}.$$

Dokažte, že geometrický průměr čísel p, q je větší než průměr harmonický a menší než průměr aritmetický ($p > 0$, $q > 0$, $p \neq q$).

93. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku, jehož odvěsny mají délky a, b, přepona délku c a výška na přeponu délku v, platí:

a) $\frac{a+b}{\sqrt{2}} \leqq c$; b) $v \leqq \frac{c}{2}$; c) $4v^2 < c^2 + 2ab$.

***94.** Obdélník má délky stran $AB = CD = a$, $BC = DA = b$ a délku úhlopříček $AC = BD = 2r$, kde r je poloměr kružnice obdélníku opsané. Průsečík úhlopříček je S. Veďte kolmici AP z vrcholu A na úhlopříčku BD a její patu označte P, dále kolmici PQ na úhlopříčku AC a její patu označte Q. Vypočítejte velikost úseček AP, AQ, PQ a zdůvodněte nerovnosti:

a) $AP \leqq AS = r$; b) $AD > AP$; c) $PQ < AP$
d) $a + b \leqq 2r\sqrt{2}$; e) $2AP^2 < 2r^2 + ab$.

95. Řešte nerovnosti a příslušnou množinu čísel zobrazte na číselné ose:

a) $4x - 3 > 5 - 2x$; b) $2 + 5x < 2x - 6$;

c) $\frac{3}{4}x - 5 > 0$; d) $\frac{2x-3}{12} + \frac{3-x}{16} > 0$;

e) $4 - \frac{2}{5}x < 0$; f) $\frac{1-2x}{3} + \frac{2x-5}{2} < \frac{7}{6}$;

g) $\frac{2}{3}(x-4) - 1 > 0$; h) $\frac{2}{3}(x-1) - 3 < 0$;

i) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{3} > \frac{x}{2} - \frac{x-5}{3}$;

j) $\frac{5+x}{2} - 3x > \frac{1-5x}{3}$; k) $x - \frac{5x-3}{8} < \frac{3x+5}{8}$.

96. Řešte:

a) $2(5 + 3v) < 8 + 6v$; b) $\frac{x+3}{2} \geqq \frac{3}{4}$;

c) $\frac{2n-1}{3} < \frac{n+6}{2}$; d) $\frac{5(p-1)}{6} - 1 > \frac{2(p+1)}{3}$;

e) $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}$;

f) $\frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2} > \frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6}$.

97. Určete všechna přirozená čísla, která vyhovují nerovnosti:

a) $\frac{2+27x}{6} < \frac{5}{2} + \frac{12x+1}{3}$;

b) $\frac{4x}{3} \leqq \frac{2}{3} + x$; c) $3(x+2) + \frac{x-2}{2} > 0$;

d) $(3x-5)^2 + (4x-3)^2 > (5x-4)^2$;

e) $\frac{7-x}{2} > \frac{2x-3}{4} - \frac{1-2x}{5}$.

98. Určete všechna celá čísla záporná splňující nerovnosti:

a) $6y + 1 > 2(y-5) - 1$; b) $\frac{1}{2}(1+2y) \leqq \frac{3}{2}y + 1$;

c) $\frac{y}{2} + 4 > \frac{10-y}{2} + 1$; d) $4(y+2) + 3(y+1) - 7y > 0$;

e) $\frac{3}{2}x - \frac{2x+6}{3} > \frac{4x-2}{5}$; f) $2(z-7) > \frac{2z-105}{5}$.

99. Určete všechna reálná čísla x, pro která mají tyto výrazy hodnoty kladné:

a) $5(x+1) + 2(x+2) - 3(x-3)$;

b) $\frac{2x+1}{2} - \frac{3x-1}{3}$; c) $7(x-2) - 7x$.

100. Určete všechna reálná čísla y, pro která mají tyto výrazy hodnoty záporné:

a) $\frac{2y+4}{4} + 3(y+2)$; b) $3y - 2(y+1) + 3(1-y)$.

101. Určete všechna reálná čísla v, pro která mají tyto zlomky hodnotu kladnou:

a) $\frac{3}{8+v}$; b) $\frac{2-v}{12}$; c) $\frac{-4}{2v-1}$.

102. Řešte nerovnosti a proveďte diskusi řešení vzhledem k parametru m:

a) $m(x-1) > x-2$; b) $x+m > 2mx - m^2$;

c) $(x+m)^2 < x^2+1$; d) $(x+2m)^2 > x^2+4$;

e) $\dfrac{mx+1}{3} + \dfrac{4m-x}{2} < \dfrac{m}{6}$;

f) $\dfrac{x}{m} + \dfrac{1+3x}{2} > \dfrac{x+2}{4m}$, $m \neq 0$;

g) $\dfrac{2x}{2-m} - \dfrac{m(x+1)}{2-m} < 1$, $m \neq 2$.

103. Řešte soustavy nerovností:

a) $2x+8 > 3x-4$, $\dfrac{5x+7}{7} < \dfrac{2x+7}{3}$; b) $3x-8 < 2(2x-5)$, $5x+2 > 9(1-x)$.

104. a) $(2x+1)^2 \leqq 4x^2+3$, $x-1 < 3x+1$; b) $2(x^2-1) + (3x+3)^2 > (6x-1)^2 - (5x-2)^2$, $5x+2 < 0$.

105. a) $5(x+1) + 6(x+2) > 9(x+3)$, $7x - 3(2x+3) > 2(x-18)$;

b) $(x-3)(x-4) < (x+1)(x+2)$, $x(x+1) + x(x+2) > (2x-1)(x+3)$.

106. $\dfrac{7-x}{2} - 3 < \dfrac{3+4x}{5} - 4$,

$\dfrac{5}{3}x + 5(4-x) < 2(4-x)$.

107. $\dfrac{3x+5}{7} + \dfrac{10-3x}{5} > \dfrac{2x+7}{3} - 8$,

$\dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+3)}{6} > \dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{13-x}{2}$.

108. $x+2 > 2x+3 > 3x+5$.

109. $\dfrac{3x-4}{2} + x < \dfrac{5x-1}{3} < 3-2x$.

110. Určete všechna čísla celá splňující soustavu nerovností:

a) $1 - \dfrac{3x-88}{7} > 5x$,

$$4x + 5 - \frac{1}{6}(25x + 29{,}5) < 0;$$

b) $\dfrac{2x - 11}{4} + \dfrac{19 - 2x}{2} < 2x\,,$

$$\frac{2x + 15}{9} > \frac{1}{5}(x - 1) + \frac{x}{3}.$$

111. Určete všechna reálná čísla x, pro která platí:

a) $\dfrac{x - 5}{x - 1} > 0;$ b) $\dfrac{x - 5}{x - 1} < 0;$ c) $\dfrac{3 - 2x}{2x - 5} > 0\,;$

d) $\dfrac{3 - 2x}{2x - 5} < 0;$ e) $\dfrac{3x - 7}{3 - 2x} > 0\,;$ f) $\dfrac{3x - 7}{3 - 2x} < 0\,;$

g) $\dfrac{x - \sqrt{3}}{2x + \sqrt{2}} > 0;$ h) $\dfrac{x - \sqrt{3}}{2x + \sqrt{2}} < 0\,.$

112. Určete všechna reálná čísla a, pro která platí:

a) $\dfrac{3a + 7}{2 - 6a} > 0;$ b) $\dfrac{5 - 2a}{8 + 5a} > 0;$ c) $\dfrac{15 - 4a}{7 + 3a} < 0.$

113. Určete všechna reálná čísla x splňující nerovnost $x^2 + x - 6 \geqq 0$.
Řešte v oboru reálných čísel:

114. $3x^2 - 3x + 4 > 2x^2 + 2x - 2\,.$

115. $3x^2 - 19x + 6 < 0\,.$
[Návod: $-19x = -x - 18x$.]

116. $2x^2 + 3x - 5 \leqq 0\,.$
[Návod: $3x = 5x - 2x$.]

117. $3x^2 - 2x - 1 > 0\,.$

118. $6x^2 - 7x + 2 > 0\,.$

119. $3x^2 - 7x - 6 > 0\,.$

120. $(x - 3)(x - 7) < 5(x - 3)\,.$

121. Dokažte, že nerovnost $x^2 + 2x + 5 < 0$ nemá v oboru reálných čísel řešení.
[Návod: Upravte levou stranu nerovnosti na součet druhých mocnin.]

122. Dokažte, že nerovnost $4x^2 - 12x + 9 > 0$ splňují všechna reálná čísla $x \neq \dfrac{3}{2}$.

123. Určete všechna reálná čísla x, která vyhovují nerovnosti

$$\frac{5-x}{2x-2}+\frac{1+4x}{2x+2}<1\,.$$

Řešení

Upravujme danou nerovnost postupně takto:

$$\frac{5-x}{2x-2}+\frac{1+4x}{2x+2}<1\,, \qquad\qquad (1)$$

$$\frac{(5-x)(x+1)+(1+4x)(x-1)}{2(x-1)(x+1)}<1\,,$$

$$\frac{5x-x^2+5-x+x+4x^2-1-4x}{2(x-1)(x+1)}<1\,,$$

$$\frac{3x^2+x+4}{2(x-1)(x+1)}<1\,, \qquad \frac{3x^2+x+4}{2(x-1)(x+1)}-1<0\,,$$

$$\frac{3x^2+x+4-2x^2+2}{2(x-1)(x+1)}<0\,, \qquad \frac{x^2+x+6}{2(x-1)(x+1)}<0\,,$$

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}}{2(x-1)(x+1)}<0\,. \qquad\qquad (2)$$

Jelikož výraz $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}$ je kladný pro všechna reálná čísla x, musí být výraz $(x-1)(x+1)$ záporný, aby nerovnost (2) byla splněna. Snadno lze zjistit, že nerovnost (2), a tedy také nerovnost (1), splňují jen čísla $-1<x<1$. (Nerovnosti $x-1>0$, $x+1<0$ nelze současně splnit; nerovnosti $x-1<0$, $x+1>0$ lze splnit pro čísla $-1<x<1$.)

Závěr: Danou nerovnost splňují čísla $-1<x<1$.

124. Určete všechna reálná čísla x, pro která má zlomek $\dfrac{x^2-4}{x-3}$ hodnotu kladnou.

125. Řešte v oboru reálných čísel nerovnost $\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}>0\,.$

126. $3-\dfrac{2x-17}{x-5}>\dfrac{x-5}{x-2}\,.$

127. $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x - 6} < 0$.

*128. Určete všechna reálná čísla x, pro která je splněna nerovnost

$$\frac{12x^2 - 36x + 27}{8x^2 - 18} > \frac{3}{2}.$$

129. Určete všechna reálná čísla x, pro která platí:

$$\frac{2(x-1)}{x^2 - 1} \geqq 1, \; x \neq 1, \; x \neq -1.$$

*130. Určete všechna reálná čísla x, pro něž platí:

$$\frac{1 + x^2}{(1 - x)^2} \geqq 2, \; x \neq 1.$$

[Návod: Upravte nerovnost nejprve na tvar $x^2 - 4x + 1 \leqq 0$, potom na tvar $(x - 2)^2 - (\sqrt{3})^2 \leqq 0$ a proveďte rozklad levé strany nerovnosti podle vzorce $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.]

131. Určete všechna reálná čísla x, pro která mají smysl odmocniny:

a) $\sqrt{x^2 - 3x - 4}$; b) $\sqrt{\dfrac{-2}{x^2 - 5x + 6}}$.

132. Čitatel i jmenovatel zlomku jsou čísla celá, přičemž jmenovatel je o 2 větší než čitatel. Zvětšíme-li čitatele i jmenovatele tohoto zlomku o číslo 1, nabude zlomek hodnoty, která je větší než $\frac{1}{2}$. Zmenšíme-li jeho čitatele i jmenovatele o číslo 1, nabude hodnoty menší než $\frac{2}{5}$. Určete tento zlomek.

133. Délky stran trojúhelníka jsou vyjádřeny přirozenými čísly. Jedna má velikost 8 cm, součet velikostí zbývajících dvou je 32 cm. Určete je.

*134. Kolik litrů vody musíme přilít do 10 litrů 90%—92% lihu, abychom dostali líh 40%—42%?

*135. 10 litrů vody 13 °C teplé smísíme se $12\frac{1}{2}$ litru vody teplejší tak, aby směs měla teplotu větší než 25 °C a menší než 30 °C. Jakou teplotu musí mít teplejší voda?

136. Délky stran trojúhelníka jsou vyjádřeny přirozenými čísly. Jak jsou velké, měří-li jedna z nich 3 cm a rozdíl zbývajících dvou 1 cm?

137. Kdyby traktorista zoral denně o 2 ha více než plánoval, zoral by za 5 dní více než 80 ha. Kdyby zoral denně o 2 ha méně než plánoval, zoral by za 6 dní nejvýše 84 ha. Jaký byl denní plán orby?

138. V rovnici $2 - p = \dfrac{2p}{x - 1}$ je x neznámá a p parametr. Řešte ji a proveďte úplnou diskusi řešení vzhledem k parametru p.

Řešení

Vyloučíme-li z řešení kořen $x = 1$, můžeme danou rovnici upravovat takto:

$(2 - p)(x - 1) = 2p$,
$2x - px - 2 + p = 2p$,
$x(2 - p) = 2 + p$.

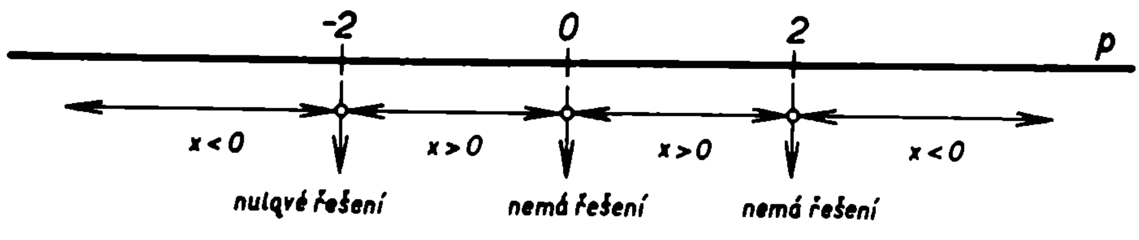
a) Je-li $p = 2$, má rovnice tvar $0 = \dfrac{4}{x - 1}$ a nelze ji splnit pro žádné číslo x.

b) Je-li $p \neq 2$, má rovnice jediné řešení $x = \dfrac{2 + p}{2 - p}$. Toto řešení je kladné pro $-2 < p < 2$, $p \neq 0$, neboť pro toto řešení musí být splněny nerovnosti $2 + p > 0$, $2 - p > 0$ nebo $2 + p < 0$, $2 - p < 0$, přičemž nerovnosti $2 + p < 0$, $2 - p < 0$ nelze současně splnit.

Řešení je záporné, je-li $p > 2$ nebo $p < -2$, neboť pro toto řešení musí být splněny nerovnosti $2 + p > 0$, $2 - p < 0$ nebo $2 + p < 0$, $2 - p > 0$.

Řešení rovné nule má rovnice pro $p = -2$.

Závěr: Je-li $p = 0$ nebo $p = 2$, nemá rovnice řešení; pro $p \neq 0$, $p \neq 2$ má rovnice jediné řešení $x = \dfrac{2 + p}{2 - p}$. Toto řešení je kladné, je-li $-2 < p < 2$, záporné pro $p > 2$ nebo $p < -2$ a nulové pro $p = -2$.
Záznam na číselné ose (obr. 2):



Obr. 2

139. Proveďte úplnou diskusi řešení rovnic, je-li x neznámá, a parametr:

a) $\dfrac{x + a}{5} - \dfrac{x - 5}{a} = 2$; b) $\dfrac{a}{3 + x} = \dfrac{2}{x}$;

c) $a - 4 + \frac{2}{x-1} = 0$;

d) $\frac{(a-1)x}{a} = 1 - a$;

e) $\frac{a}{a-2} = \frac{x}{x+2}$;

f) $\frac{x}{x-1} = \frac{x-a}{x}$;

g) $\frac{x}{3x-a} = \frac{a+x}{3x-1}$.

140. Pro která čísla t mají následující rovnice jedno řešení kladné:

a) $4x = 3t - 15$;

b) $2x - 1 = 4 + 5t$;

c) $\frac{t}{4} = \frac{3}{x}$;

d) $4 - t = \frac{2}{x-1}$.

$\boxed{\textbf{141.}}$ Proveďte úplnou diskusi řešení soustavy

$$y = 1 + 2x,$$
$$px + y = 2,$$

jsou-li x, y neznámé a p parametr.

Řešení

Odečteme-li od druhé rovnice soustavy rovnici prvou, dostaneme rovnici $px = 1 - 2x$, odkud

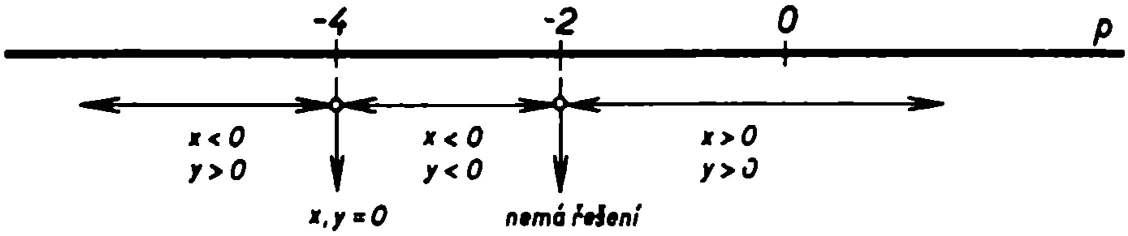
$$x(p + 2) = 1 .$$

a) Je-li $p = -2$, má soustava tvar $y = 1 + 2x$, $-2x + y = 2$. Rovnice jsou ve sporu a soustava nemá řešení.

b) Je-li $p \neq -2$, je $x = \frac{1}{p+2}$, $y = 1 + \frac{2}{p+2} = \frac{p+4}{p+2}$ a soustava má jedno řešení. Toto řešení tvoří dvojice kladných čísel ($x > 0$, $y > 0$), je-li $p + 2 > 0$, $p + 4 > 0$, tedy $p > -2$. Řešení tvoří dvojice záporných čísel ($x < 0$, $y < 0$), je-li $p + 2 < 0$, $p + 4 > 0$, tedy $-4 < p < -2$. Řešení $x > 0, y < 0$ soustava nemá, jelikož nerovnosti $p + 2 > 0$, $p + 4 < 0$ nelze současně splnit. Řešení $x < 0, y > 0$ má soustava tehdy, je-li $p + 2 < 0$, $p + 4 < 0$, tedy pro $p < -4$. Řešení ($x = 0, y$) soustava nemá. Řešení ($x, y = 0$) má soustava pro $p = -4$. Nulová řešení ($x = 0, y = 0$) soustava nemá.

Závěr: Soustava nemá řešení pro $p = -2$. Je-li $p \neq -2$, má soustava jedno řešení $x = \frac{1}{p+2}$, $y = \frac{p+4}{p+2}$, které tvoří dvojice kladných čísel ($x > 0$, $y > 0$) pro $p > -2$, dvojice záporných čísel ($x < 0$, $y < 0$)

pro $-4 < p < -2$. Řešení $x < 0$, $y > 0$ má soustava pro $p < -4$, řešení $x, y = 0$ pro $p = -4$.
Záznam na číselné ose (obr. 3):



Obr. 3

142. Proveďte úplnou diskusi řešení soustav
a) $ax + y = 7;$ b) $3x + y = 10,$
$3x - 2y = 7,$ $x - 3y = a,$
jsou-li x, y neznámé a a parametr.

143. Určete všechna reálná čísla a, pro která má soustava
a) $5x - ay = 21,$ b) $3x + 7y = a,$
$3x - 6y = 2;$ $2x + 5y = 20$
řešení $x > 0, y > 0$.

144. Určete všechna reálná čísla k, pro která má soustava
a) $3x - y = 10,$ b) $3x - 2y = 5,$ c) $3x - 6y = 1,$
$x - 3y = k;$ $kx + 2y = 2;$ $5x - ky = 2$
řešení $x < 0, y < 0$.

145. V oboru reálných čísel proveďte úplnou diskusi řešení rovnice $x^2 - 2(p + 1)x + 2(p + 5) = 0$, je-li x neznámá a p parametr.

Řešení

a) Rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel, je-li její diskriminant $D = (p + 1)^2 - 2(p + 5) = p^2 + 2p + 1 - 2p - 10 = p^2 - 9 = (p + 3)(p - 3) < 0$. To nastane tehdy, je-li $-3 < p < 3$.
b) Rovnice má jeden dvojnásobný kořen, je-li její diskriminant $D = 0$, což nastane tehdy, je-li $p = 3$ nebo $p = -3$.
c) Rovnice má dva reálné kořeny různé, je-li její diskriminant $D > 0$, což nastane tehdy, je-li $p > 3$ nebo $p < -3$.

1. Tyto dva kořeny jsou kladné, jsou-li splněny podmínky $D > 0$, $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 \cdot x_2 > 0$, kde x_1, x_2 jsou kořeny naší rovnice. Zřejmě musí platit též nerovnosti $(p + 3)(p - 3) > 0$, $p + 1 > 0$, $p + 5 > 0$, neboť $x_1 + x_2 = 2(p + 1)$ a $x_1 \cdot x_2 = 2(p + 5)$. Jelikož uvedené tři nerovnosti musí platit současně, lze je splnit jen pro čísla $p > 3$.
2. Tyto dva kořeny jsou záporné, jsou-li splněny podmínky $D > 0$,

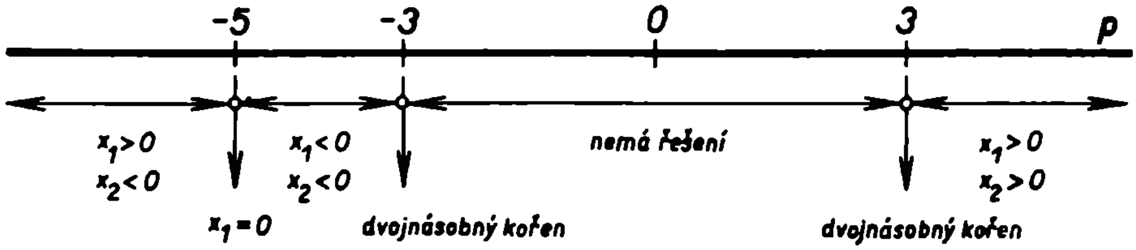
$x_1 + x_2 < 0$, $x_1 . x_2 > 0$, tedy i nerovnosti $(p + 3)(p - 3) > 0$, $p + 1 < 0$, $p + 5 > 0$. To nastane jen pro čísla $-5 < p < -3$.

3. Tyto dva kořeny mají rozdílná znamení, platí-li $D > 0$, $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 . x_2 < 0$ nebo $D > 0$, $x_1 + x_2 < 0$, $x_1x_2 < 0$, tedy i nerovnosti $(p + 3)(p - 3) > 0, p + 1 > 0, p + 5 < 0$ nebo $(p + 3)(p - 3) > > 0$, $p + 1 < 0$, $p + 5 < 0$. První trojici nerovností však nelze současně splnit, druhou pro všechna čísla $p < -5$. Nutno ještě podotknout, že dva reálné kořeny opačné daná rovnice nemá pro žádnou hodnotu p. (Pro $p = -1$ by přešla v rovnici ryze kvadratickou, která však nemá řešení v oboru reálných čísel.)

d) Rovnice má jeden kořen nulový, druhý nenulový, je-li $p + 5 = 0$, tedy pro $p = -5$. V tom případě přejde daná rovnice v kvadratickou rovnici bez absolutního členu a má tvar $x^2 + 8x = 0$.

Závěr: Je-li $-3 < p < 3$, nemá daná rovnice v oboru reálných čísel řešení. Je-li $p = -3$ nebo $p = 3$, má jeden kořen dvojnásobný. Je-li $p > 3$, má rovnice dva reálné kořeny různé kladné, pro $-5 < p < -3$ má oba kořeny záporné, pro $p < -5$, má dva reálné kořeny rozdílných znamení. Je-li $p = -5$, má rovnice jeden nulový a jeden nenulový kořen.

Záznam na číselné ose (obr. 4):



Obr. 4

*146. V oboru reálných čísel proveďte úplnou diskusi řešení rovnice $(p - 1)x^2 - - (p - 2)x + (2p - 1) = 0$,
je-li x neznámá a p parametr.

147. Pro která čísla a má rovnice $x^2 - 2(a + 2)x + 4(a + 5) = 0$ dva reálné kořeny různé a kladné?

148. Pro která čísla n má rovnice $x^2 - 2(n - 4)x + (10 - 3n) = 0$ dva reálné kořeny různé a záporné?

149. Určete, pro která čísla m má rovnice
$x^2 + 2(m + 4)x + m^2 + 6m = 0$ jeden kořen kladný a jeden kořen záporný.

*150. Dvě nádoby mající objemy a, b litrů obsahují právě c, d litrů kapaliny. Do prvé přitéká e litrů kapaliny za minutu, do druhé f litrů kapaliny za minutu. Za jakou dobu bude v obou nádobách stejné množství kapaliny? V jakém vztahu jsou udaná čísla, má-li mít úloha řešení?

151. Obvod obdélníka měří $2s$ cm. Zvětšíme-li jeden jeho rozměr o e cm a druhý o f cm, zvětší se jeho obsah o d cm^2. Jak velké jsou rozměry obdélníka? Jaké vztahy musí platit mezi udanými čísly, má-li mít úloha řešení?

152. Smísíme-li a litrů vody s b litry vody, přičemž jsou jejich teploty různé, dostaneme směs o teplotě t °C. Smísíme-li b litrů první vody s a litry druhé vody, dostaneme směs o teplotě u °C. Jaké jsou teploty obou smíšených kapalin? Určete vztah mezi čísly a, b, t, u, aby úloha byla řešitelná.

153. Z místa A vyjelo auto rychlostí c_1 km/h; o jednu hodinu později vyjelo za ním jiné auto rychlostí c_2 km/h. Kdy dohoní druhé auto auto první? Proveďte diskusi.

***154.** Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a. Vepište mu čtverec $MNPQ$, jehož obsah je P. Jaký vztah musí platit mezi čísly a, P, aby úloha byla řešitelná?

[Návod: $MN = \sqrt{P}$. Vrchol M rozděluje stranu AB na úseky x a $(a - x)$; platí vztah $x^2 + (a - x)^2 = P$.]

***155.** Obdélníkový plech má rozměry a, b, přičemž $a > b$. Má se z něho vystřihnout obdélník, který má poloviční obsah, aby vznikl na všech stranách rámeček stejně široký.
Vypočítejte šířku rámečku a zjistěte podmínky řešitelnosti úlohy.

3. ABSOLUTNÍ HODNOTA REÁLNÉHO ČÍSLA

156. $|a|$ definujeme takto: je-li $a \geqq 0$, je $|a| = a$, je-li $a < 0$, je $|a| = -a$. Definujte $|a - b|$, $|a + b|$, $|ab|$.

157. Platí-li $|x| < a$, platí též $-a < x < a$. Dokažte to.

158. Proveďte: a) $\dfrac{|-10|}{|-5|} - \dfrac{6}{|-2|} + \dfrac{12}{-|-3|}$;

b) $|(-2)^3| - |(-2)^2| - |-2|^2$;

c) $|6|^2 - |(-2)^2|^2 - 8|2|^2$.

159. Jakou hodnotu má výraz $|5 - x|$ pro $x = 5$, $x < 5$, $x > 5$?

160. Znázorněte na číselné ose čísla n a $|n|$, je-li a) $n < 0$, b) $n > 0$. Jakou hodnotu má součet $n + |n|$?