VI. FUNKCE

1. POJEM FUNKCE A FUNKCE LINEÁRNÍ

1. Vyslovte definici funkce a definičního oboru funkce. Zjistěte pak, zda v následujících předpisech jde o funkci:

a) $y = x + 1$; b) $y = \dfrac{2}{x+1}$; c) $y^2 = ax, a > 0$; d) $y^2 + x^2 = 25$; e) $y = x^3 - 9$; f) $y = \sqrt{x^3 - 8}$; g) $y = 2x^2 - 3x + 5$; h) $y = a \,.\, b^x$, kde $1 \leqq a \leqq 5, b = 2$; i) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x^3$; j) $y^2 = \sqrt{x} - 2$.

Do které množiny oboru funkce z úlohy a), —j) patří číslo 0?

2. Rozhodněte, který z předpisů značí jedinou funkci:

a) $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ pro } x \in \langle 1,3) \\ x - 1 \text{ pro } x \in \langle -2,1) ; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 + x \text{ pro } x \in (0,2) \\ 3x - 1 \text{ pro } x \in (-3,0) ; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} \text{ pro } x \in \langle -3,-2\rangle \\ 2x \text{ pro } x \in (0,2\rangle ; \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} \text{ pro } x \in \langle -3,-2\rangle \\ 2x \text{ pro } x \in \langle -2,1) ; \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} \text{ pro } x \in (-3,-2\rangle \\ 2x \text{ pro } x \in (-2,1\rangle ; \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \text{ pro } x \in \langle -2,1\rangle \\ x^2 \text{ pro } x \in \langle 0,3\rangle . \end{cases}$

$\boxed{3.}$ Určete definiční obor funkce $y = \dfrac{3x - 1}{x\sqrt{2 - x - x^2}}$.

Řešení

Tato funkce je definována pro všechny hodnoty proměnné $x \neq 0$, pro které je výraz pod odmocnítkem kladný. Proč? Platí tedy: $2 - x - x^2 > 0$, $(x + 2)(1 - x) > 0$. Tato nerovnost je splněna pro $-2 < x < 1$. Načrtněte.

Závěr: Funkce $y = \dfrac{3x - 1}{x\sqrt{2 - x - x^2}}$ je definována pro x z intervalu $(-2,1)$, kromě nuly.

4. Určete množinu čísel, na níž jsou definovány funkce:

a) $y = x$; b) $y = 3x$; c) $y = 3 - x$; d) $y = a$ (a je číslo reálné);

e) $y = \frac{1}{x}$; f) $y = \sqrt{x}$; g) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; h) $y = x^2$; i) $y = \sqrt{x^2}$;

j) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$; k) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; l) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Určete, kterých hodnot nabývá daná funkce pro všechny hodnoty proměnné x z definičního oboru (obor funkčních hodnot funkce).

5. Určete definiční obor funkcí:

a) $y = \sqrt[4]{x^2}$; b) $y = \sqrt[3]{x}$; c) $y = \sqrt[3]{x^2}$; d) $y = \sqrt{5 - 2x}$; e) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$; f) $y = \frac{2x}{-2 + 3x - x^2}$; g) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$;

h) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$; i) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$; j) $y = \sqrt{6x - (x^2 + 11)}$.

6. Určete definiční obor a obor funkčních hodnot funkce:

a) $y = 3 - x^2$; b) $y = (3x - 2)^2 - 4$; c) $y = |x|$; d) $y = x - |x|$;

e) $y = \sqrt{1 - |x|}$; f) $y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$; g) $y = \frac{2x - 3}{x^3 - 4x^2}$;

h) $y = \frac{1}{1 - \sqrt{1 + 2x}}$; i) $y = \sqrt{x - 1} + 2\sqrt{1 - x} + \sqrt{x^2 + 1}$;

j) $y = \sqrt{\frac{x - 2}{x + 2}} + \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$; k) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$.

7. Jakou funkcí času je dráha tělesa, které se pohybuje rovnoměrně tak, že za jednu vteřinu urazí dráhu a) 10 cm, b) 1 m, c) a km?

8. Vyjádřete závislost velikosti úhlu (ve stupních), o který se otočí a) velká, b) malá hodinová ručička na době t (min).

9. Na trati dlouhé 5 km je celkové převýšení 55 m. Vyjádřete vzorcem závislost výšky místa na trati na jeho vzdálenosti od výchozího bodu, je-li stoupání trati konstantní.

10. Pro převod teploty t_C ze stupnice Celsiovy na teplotu ve stupnici Fahrenheitově platí vztah $t_F = \frac{9}{5} t_C + 32$. Jakou funkcí teploty v Celsiově stupnici je teplota změřená ve stupnici Fahrenheitově?

11. Při složeném úrokování závisí konečná velikost vkladu a_n na počtu úro-

kovacích období n a na procentové míře p vztahem $a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, kde a_0 je velikost počátečního vkladu.
a) Jaká je to funkce? b) Určete a_0 jako funkci ostatních veličin.

12. Část louky tvaru pravoúhlého trojúhelníka, jehož velikosti odvěsen jsou a, b, má být zastavěna budovou s obdélníkovým půdorysem tak, aby jeden roh měla ve vrcholu trojúhelníka, protější roh aby ležel na přeponě daného trojúhelníka. Jakou funkcí jednoho rozměru budovy bude druhý rozměr?

13. Do koule o daném poloměru r je vepsán rotační válec. Vyjádřete objem V válce jako funkci jeho výšky v. Pro která v je V definováno?

14. Do koule o poloměru r je vepsán rotační kužel. Vyjádřete jeho plášť Q jako funkci jeho strany s. Ve kterém intervalu proměnné s je Q definováno?

15. Kouli o daném poloměru r je opsán rotační kužel. Poloměr jeho podstavy je x, jeho výška v, objem V. a) Vyjádřete hodnoty v, V jako funkce proměnné x a rozhodněte, pro která x jsou tyto funkce definovány. b) Vyjádřete V jako funkci v a proveďte podrobnou diskusi.

16. Vyjádřete délku matematického kyvadla jako funkci jeho doby kmitu. $\left[\text{Návod: } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\,.\right]$

***17.** Jakého tlaku b_n vzduchu dosáhneme v pneumatice, jejíž objem je V, po n tazích hustilky objemu v?
[Návod: $(V + v)\, b = Vb_1$; $(V + 2v)\, b = Vb_2, \ldots, (V + n \cdot v)\, b = V \cdot b_n$.]

***18.** Jaká je závislost tlaku b pod recipientem vývěvy, jehož objem je R, na počtu zdvihů pístu, pod nímž se vytvoří v krajní poloze objem V? [Návod: $Rb = (R + V)\, b_1$, $Rb_1 = (R + V)\, b_2, \ldots$.]

19. Zpaměti:
Ve kterém kvadrantu leží obraz bodů, jejichž souřadnice jsou:
a) (a,a); b) (a,b); c) $(-a,b)$; d) $(a,-b)$; e) $(-a,-b)$, (a,b jsou libovolná čísla reálná)?

20. V pravoúhlé soustavě souřadnic jsou dány body: $A \equiv (2,3)$, $B \equiv (-2,3)$, $C \equiv (2,-3)$, $D \equiv (-2,-3)$, $E \equiv (-1,3)$, $F \equiv (-1,0)$, $G \equiv (2,0)$. Které z těchto bodů jsou souměrně položeny podle osy x,y, podle počátku?

21. Stanovte, jaký útvar vyplní body, jejichž souřadnice splňují podmínky:

a) $x = 2, y > -2$;	e) $-1 \leqq x \leqq 2, y \leqq -2$;
b) $y \geqq -1, x = 3$;	f) $-2 \leqq y \leqq 1, x > 2$;

c) $y \geqq 3, x < 2$; g) $0 \leqq x \leqq 4, y = 0$.
d) $0 \leqq x = 1, 0 \leqq y \leqq 2$; Znázorněte.

22. Sestavte tabulku hodnot proměnné x a sestrojte graf funkcí:

a) $y = x$; $y = 3$; $y = \frac{1}{2}x$; $y = -\frac{1}{2}x$; $x \in \langle -1, 5 \rangle$

b) $y = x + 3$; $y = x - 3$; $y = x + 0{,}6$; $y = -x + 2$
(x je číslo celé, kladné menší než 10);

c) $y = 2x - 0{,}5$; $y = \frac{2}{3}x + 4$; $y = \frac{1}{2}x - 0{,}5$; $y = -2x + 4$.

23. Uveďte na tvar $y = kx + q$ a sestrojte graf funkcí:

a) $2x + 3y - 6 = 0$;
b) $3x - 2y - 6 = 0$;
c) $4x - 5y = 20$;
d) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 1$;
e) $10x + 14y = 35$;
f) $14x - 12y = 21$;
$x \in \langle -5{,}10 \rangle$.

24. Narýsujte graf funkce, která je určena předpisem ceníku osobní dopravy ČSD do vzdálenosti 20 km.

25. Pro které hodnoty proměnné x nabývají funkce z úlohy 23 hodnoty nula? Co znamenají tyto nulové hodnoty geometricky?

26. Ze stanic A, B, vzdálených od sebe 30 km, vyjíždějí současně proti sobě dva autobusy, oba stejnou rovnoměrnou rychlostí 45 km/h. V místě C, vzdáleném od A 12 km, mají oba autobusy 10minutovou zastávku. Rozhodněte podle grafu, kdy a kde se autobusy potkávají.

27. Z obou konečných stanic vyjíždějí trolejbusy v 10minutových intervalech. Doba jízdy je 40 minut. Kolik trolejových vozů potká na trati každý vůz? Řešte graficky. (Vozy nevyjíždějí z konečných stanic současně.)

28. Použijte grafu předchozí úlohy a zjistěte, kolik trolejových vozů potká chodec, který ujde celou trať za 2 hodiny, a kolik vozů jej předjede.

29. Znázorněte graficky následující lineární funkce. Všimněte si, které přímky jsou rovnoběžné, popřípadě splývají. Protínají se některé z nich na osách souřadnic? Které z těchto funkcí mají graf procházející počátkem?

a) $2x + 3y = 0$; b) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0$; c) $x + 1{,}5y = 0$;

d) $\frac{2x}{3} + y = 4$; e) $3x + 4y = 16$; f) $y - 2x = 3$;

g) $3y + 8 = 2x$; h) $3x = 12$; i) $3x = -12$;

j) $y = \frac{1}{2}x - 3$; k) $x - 2y = 6$; l) $y - 2x = 6$;

m) $x + 3 = 0$; n) $y - 6 = 0$.

***30.** Dokažte, že funkce

a) $F(x) = 6^x$ vyhovuje rovnici $F(x + 2) - 7F(x + 1) + 6F(x) = 0$;

b) $G(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^y$ vyhovuje rovnici $2G(y + 2) + 5G(y + 1) - 3G(y) = 0$.

***31.** Pro tlak nasycených vodních par platí empirický vzorec $p = a \cdot b^{\frac{T}{c+T}}$, kde a, b, c jsou kladné konstanty, T absolutní teplota. Vyjádřete T jako funkci p.

32. Sestrojte graf funkce

$$y = |x + 1| - |x - 1|.$$

Řešení

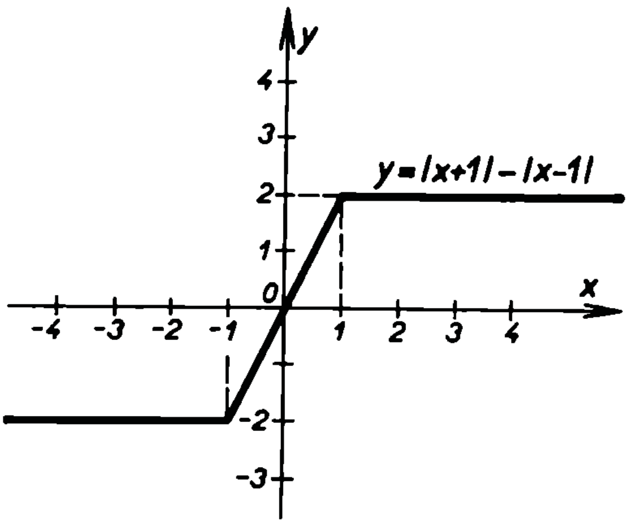
Tato funkce je lineární nebo konstantní a je tedy definována na množině všech čísel reálných. Definiční obor této funkce rozdělíme tak, aby platilo a) $x + 1 > 0$, $x - 1 > 0$; b) $x + 1 \geqq 0$, $x - 1 \leqq 0$; c) $x + 1 < 0$, $x - 1 < 0$. V případě a) je $x \in (1, \infty)$, v případě b) $x \in \langle -1, 1 \rangle$, v případě c) $x \in (-\infty, -1)$. Potom pro a) platí $y = |x + 1| - |x - 1| = x + 1 - (x - 1) = 2$ (neboť $|a| = a$ pro $a > 0$).

b) $y = x + 1 - (-x + 1) =$
$= x + 1 + x - 1 = 2x$,
neboť $|a| = -a$ pro $a < 0$.

c) $y = -(x + 1) - (-x + 1) =$
$= -x - 1 + x - 1 = -2$.

Graf funkce $y = |x + 1| - |x - 1|$ se skládá tedy ze tří částí (obr. 8):

a) $y = 2$ pro $x \in (1, \infty)$,
b) $y = 2x$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$,
c) $y = -2$ pro $x \in (-\infty, -1)$.



Obr. 8

33. Zobrazte průběh funkce

a) $y = |x - 1|$;
b) $y = |2x - 1|$;
c) $y = 3 - |2 - x|$; d) $y = 2|x + 1| - 3|x - 1|$;
e) $y = |x - 3| - 2|x + 1| + 2|x| - (x - 1)$.

34. Zobrazte množinu bodů $\mathbf{A} \equiv (x,y)$, o jejichž souřadnicích platí:

$|x - y| \leqq 1$, $|x + y| \leqq 1$, $|x| + |y| \leqq 1$. [Návod: Uvažte všechny možnosti: $x - y \gtreqless 0$, $x + y \gtreqless 0$, $x \gtreqless 0$, $y \gtreqless 0$.]

35. Určete koeficienty lineární funkce $y = ax + b$ tak, aby:

a) pro $x = 2$ bylo $y = 3$ a pro $x = 4$ bylo $y = 7$;
b) pro $x = -1$ bylo $y = 1$ a pro $x = 1$ bylo $y = 3$;
c) pro $x = 0$ bylo $y = 0$ a pro $x = 3$ bylo $y = 3$;
d) pro $x = -1$ bylo $y = 3$ a pro $x = 0$ bylo $y = 0$;
e) sestrojte graf těchto funkcí a odečtěte z něho funkční hodnoty y příslušné hodnotám proměnné x pro a) $x = -2$, b) $x = 1{,}5$, c) $x = -2{,}5$ apod., udejte hodnoty proměnné x příslušné funkčním hodnotám, d) $y = 0$, e) $y = -1$, f) $y = -1{,}5$.

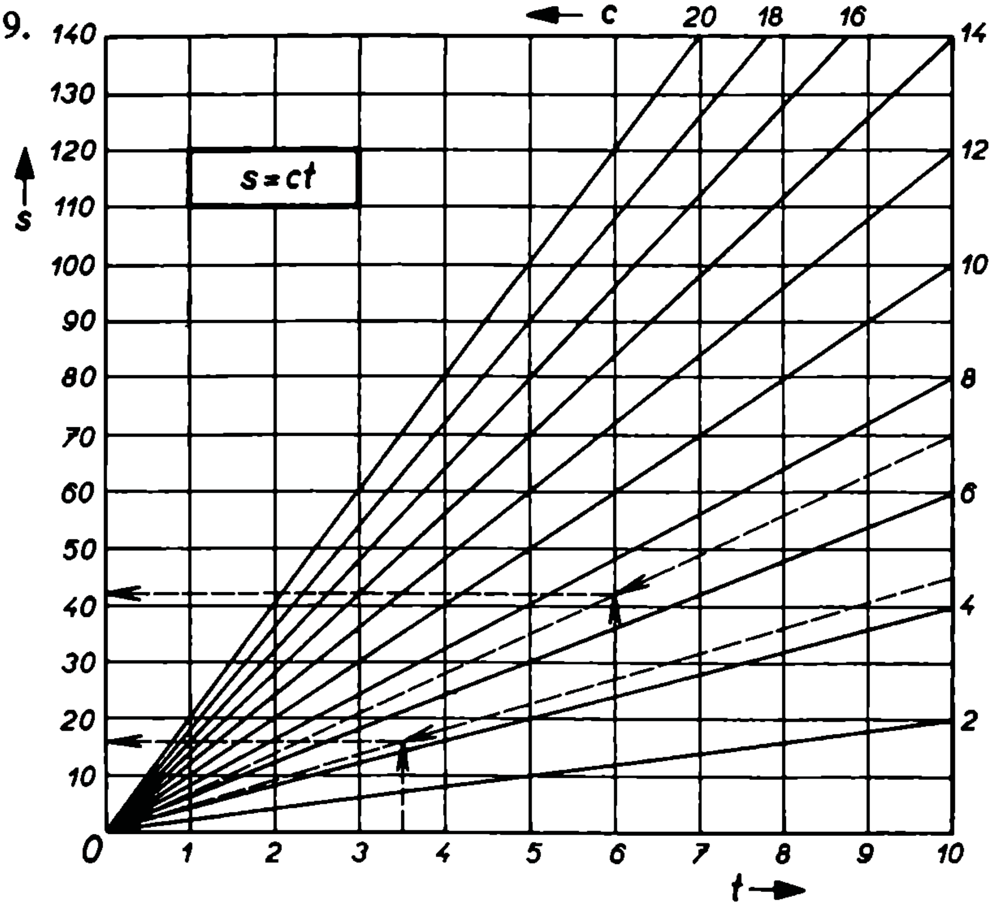
36. Sestrojte průsečíkový nomogram závislosti dráhy na čase pro rovnoměrný pohyb. Rozměry nomogramu nechť jsou 10 cm . 10 cm, obor proměnných $s \in \langle 0{,}140\rangle$ m, $t \in \langle 0{,}10\rangle$ s, $c \in \langle 0{,}14\rangle$ m/s.

Řešení

Závislost dráhy na čase pro tento pohyb rovnoměrný je vyjádřena vztahem $s = c \,.\, t$, jestliže čas začínáme počítat od okamžiku, kdy pohyb začal, tj. $s = 0$. Grafem té závislosti jsou přímky procházející počátkem. Souřadnice druhého bodu grafu pro různé hodnoty rychlosti c jsou vypočteny pro $t = 10$ v tabulce:

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
s	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140

Viz obr. 9.



Obr. 9

Má-li obrázek rozměry 10 cm . 10 cm, má stupnice pro proměnnou t délku 10 cm. Časovému intervalu 1 s odpovídá tedy úsečka dlouhá 1 cm. Svislá stupnice pro závisle proměnnou s má rozsah od 0 do 140 metrů. 140 m odpovídá na nomogramu deseti centimetrům, jednomu metru pak 0,07 cm. (Výška grafu bude proto 9,8 cm a nikoliv 10 cm.)

Velikost dráhy pro $t = 3{,}5$ s a různé rychlosti můžeme odečíst na průsečíku přímky vedené bodem $t = 3{,}5$ s rovnoběžně s osou souřadnic s s příslušným grafem pro danou rychlost. Pro hodnoty rychlosti, které nejsou vyrýsovány, je třeba souřadnice průsečíku přímky $t = 3{,}5$ s s grafem odhadnout. V našem případě pro $t = 3{,}5$ s a $c = 4{,}5$ m . s^{-1} je dráha 15,75 m, pro $t = 3{,}5$ s a $c = 1$ m . s^{-1} je dráha $s = 3{,}5$ m, pro $t = 6$ s, $c = 7$ m . s^{-1} je $s = 42$ m atd. Takovéto obrazy závislosti mezi třemi veličinami se nazývají průsečíkové nomogramy. Pro snazší jejich rýsování i spolehlivější odčítání souřadnic průsečíků se užívá předtištěných stupnic a grafických papírů. Pro sestrojení dalších nomogramů použijte milimetrového (grafického) papíru.

37. Sestrojte tabulku hodnot obsahu a z ní průsečíkový nomogram pro obsah obdélníka o rozměrech a, b, pro $a \leqq 20$ m, $b \leqq 50$ m. Nomogram má mít rozměry 10 cm . 5 cm.
Z nomogramu určete pak: 25 . 10; 37 . 8; 45 . 11, atd.
[Návod: Vodorovná stupnice: 50d . . . 10 cm, 1d . . . 2 mm;
svislá stupnice
pro P: 1000d . . . 10 cm, 1d . . . $\frac{1}{100}$ mm,
a je parametr.]

38. Sestavte tabulku hodnot pro objem válce a podle ní pak sestrojte průsečíkový nomogram. (Volte rovnoměrné dělení stupnic pro πv, V a r užijte jako parametr.)

39. Sestrojte průsečíkový nomogram závislosti řezné rychlosti v na soustruhu pro průměr obráběné součástky d, při počtu otoček vřetena n za minutu. Volte pro $d \in (0{,}200)$ milimetrů, pro $0 < v \leqq 50$ m min^{-1}, přičemž n je parametr a nabývá hodnot 80, 160, 300, 500, 800, 1 200, 1 600.

40. Sestrojte průsečíkový nomogram pro výpočet částky m, která je rovna p % z daného základu z. ($0 < p \leqq 10$, $0 < z \leqq 5\,000$.)

41. Určete průsečíkový nomogram pro stanovení hektolitrové (měrné) váhy zrní a semen, je-li $G \in \langle 200{,}300 \rangle$ kp pro $V = 100$ l. (Volte 1 cm . . . 20 kp, 1 cm . . . 5 l.)

42. Definujte funkci prostou, rostoucí, nerostoucí, klesající, neklesající v intervalu (a, b).

***43.** Je dána funkce $y = \frac{2}{x}$. Určete obor této funkce a dokažte, že je to funkce a) lichá, b) funkce klesající.

Řešení

a) Je-li funkce $y = f(x)$ lichá, platí pro ni $f(-x) = -f(x)$. V naší úloze má tedy platit: $y = \frac{2}{-x} = -\frac{2}{x}$. To je jistě správné pro všechna x definičního oboru. [$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.]

Funkce $y = \frac{1}{x}$ je tedy funkce lichá.

b) Funkce $y = \frac{1}{x}$ je definována a) v intervalu $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Budeme proto při vyšetřování rozlišovat dva případy:

1. $x \in (-\infty, 0)$,
2. $x \in (0, \infty)$.

1. Je-li $y = f(x)$ klesající v intervalu (x_1, x_2), kde $x_2 > x_1$, pak v celém tomto intervalu musí být $f(x_1) > f(x_2)$. Pro nás tedy $\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$, pro $x_2 > x_1 > 0$. Proto z $\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$ vyplývá
$2 . (x_2 - x_1) > 0$, neboť $x_1 x_2 > 0$ a násobením nerovnosti kladným číslem se nerovnost nemění. Výsledek x_2 $x_1 > 0$ souhlasí s předpokladem. Také obráceně z podmínky $x_2 > x_1$ lze dospět k tvrzení.

2. Nechť je $0 > x_2 > x_1$. Potom je opět $x_1 x_2 > 0$ a nerovnost $\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$ násobena číslem $x_1 x_2 > 0$ dá zase $2(x_2 - x_1) > 0$, tj. $x_2 > x_1$ což je opět předpoklad. I zde platí věta obrácená. Dokažte sami.

Závěr: Pro všechna $x \neq 0$ je daná funkce $y = \frac{2}{x}$ klesající.

44. Která z daných funkcí je rostoucí, která klesající:

a) $y = 2x + 1$; b) $y = -2x$; c) $y = 3$; d) $y = \frac{-2}{x}$;

e) $y = 2\sqrt{x}$; f) $y = x^3 - 1$; g) $y = -x^2$;

h) $y = 4 . 10^x$. Dokažte. Načrtněte jejich graf.

45. Z grafu zjistěte, ve kterém intervalu jsou funkce z předešlé úlohy prosté.

***46.** Která z funkcí úlohy 44 je lichá, která sudá? Jakou vlastnost má graf funkce sudé a jakou funkce liché? [Všimněte si grafu b) a g).]

47. Dokažte, že funkce a) $y = -ax + b$ je pro $a < 0$ rostoucí, pro $a > 0$ klesající v celém definičním oboru.

b) $y = \sqrt{1 - x^2}$ je rostoucí v intervalu $\langle -1, 0 \rangle$ a klesající v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

*48. Rozdělte definiční obor daných funkcí na takové intervaly, v nichž je daná funkce rostoucí, klesající, nerostoucí ani neklesající:

a) $y = 3 - x$; b) $y = x^2$; c) $y = 4x^2 - 9$; d) $y = -9 + 12x - 4x^2$; e) $y = |x|$; f) $y = |x| - 1$; g) $y = |x| + |x + 1|$; h) $y = |x + 1| - |x - 1|$.

*49. Která z daných funkcí je sudá:

a) $f(x) = 2^x$; b) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$; c) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$; d) $f(x) = \sin x$; e) $f(x) = x - \sin x$; f) $f(x) = \cos x$.

2. FUNKCE KVADRATICKÁ, LOMENÁ, INVERZNÍ

50. Na jednom obrázku, tj. v jedné pevně zvolené pravoúhlé soustavě souřadnic, sestrojte graf funkce:

a) $y = x^2$; b) $y = \frac{1}{2}x^2$; c) $y = 2x^2$; d) $y = 3x^2$; e) $y = -x^2$; f) $y = -\frac{1}{2}x^2$; g) $y = -2x^2$; h) $y = -3x^2$.

51. Sestrojte na jednom obrázku graf funkce:
a) $y = x^2$; b) $y = x^2 + 2$. Jak se liší graf obou funkcí? Pro kterou hodnotu x má funkce $y = x^2 + 2$ nejmenší hodnotu? Pro která x je hodnota této funkce rovna nule? Pro která x je tato funkce záporná?

52. a) Sestrojte na jednom obrázku graf funkce:
α) $y = 1{,}5x^2$; β) $y = 1{,}5x^2 - 6$; γ) $y = -1{,}5x^2 + 6$.
b) Určete z grafu, pro které hodnoty proměnné x je y rovno nule, jedné, -1, 3.
c) Pro která x mají tyto funkce nejmenší hodnotu?

53. Z grafu funkcí $y = 2x^2 + 3$, $y = -3x^2 - 2$, $y = -4x^2 + 3$ najděte hodnoty x, případně y, pro něž: a) $y = 2$ (nebo -2); b) $x = 1$ (nebo -1). Nalezené hodnoty ověřte výpočtem.

54. Sestrojte graf funkce $y = 0{,}5x^2$. a) Z něho pak určete funkční hodnoty y: $x = 0{,}5$; $x = 2{,}5$; $x = 3{,}5$; $x = -1{,}5$; $x = -3$. Určete hodnoty proměnné x pro $y = 1$; $y = 3$; $y = 3{,}5$; $y = -1$; $y = -2$.

55. Z grafu funkce $y = \sqrt{x}$ určete hodnoty $\sqrt{1{,}5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2{,}5}$, $\sqrt{2{,}8}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3{,}5}$. Srovnejte výsledky s hodnotami v tabulkách.

56. Načrtněte graf funkce $y = ax^2$ a z něho pak (opět od ruky) graf funkce $y = ax^2 + c$, kde a, c jsou daná čísla reálná. (Kladná, záporná nebo nula.)

57. Co znamenají geometricky nulové body kvadratické funkce?

58. Načrtněte graf funkce $y = ax^2$ a) pro a větší než jedna; b) pro a menší než jedna, ale kladná; c) pro a rovno jedné; d) pro a záporná.

59. Sestrojte graf funkce:
a) $y = 2x^2 + 2$, b) $y = -x^2 - 3$, c) $y = ax^2 + c$ (a, c jsou čísla reálná téhož znamení) a ukažte, že pro $y = 0$ kvadratické rovnice nemají reálné řešení.

60. V kvadratické funkci $y = x^2 + ax + b$ určete koeficienty a, b tak, aby:
a) $y = 1$ pro $x = 0$, $y = 3$ pro $x = 1$; b) $y = 1$ pro $x = -1$, $y = 5$ pro $x = 1$;
c) $y = 2$ pro $x = 0$, $y = 4$ pro $x = 2$.

61. V kvadratické funkci $y = ax^2 + bx + c$ určete koeficienty a, b, c tak, aby:
a) $y = 1$ pro $x = 0$, $y = 3$ pro $x = 1$, $y = 6$ pro $x = 2$; b) $y = 17$ pro $x = 1$, $y = 39$ pro $x = 2$, $y = 11$ pro $x = -2$.

$\boxed{\textbf{62.}}$ Sestrojte graf funkce $y = x^2 - 5x + 2$.

Řešení

Daná funkce je definována pro všechna čísla reálná. Vyjádříme ji v ekvivalentním tvaru:

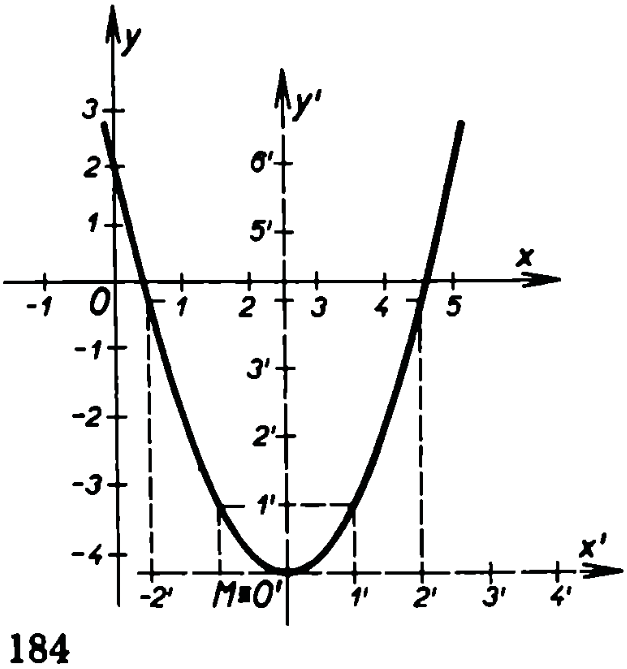
$$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2 - \frac{25}{4} =$$

$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}, \quad \text{čili}$$

$$y + \frac{17}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 .$$

Posuneme-li nyní počátek soustavy souřadnic do bodu

$$M \equiv \left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{4}\right),$$



Obr. 10

dostaneme rovnici $y' = x'^2$. Její graf je už známý z úlohy 50 a 51. Je to parabola s vrcholem v novém počátku

$M \equiv \left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{4}\right)$ a osou rovnoběžnou s osou y. (Obr. 10)

Výsledek zobrazení ověřte grafem z tabulky hodnot původní funkce.

63. Co nejjednodušeji sestrojte graf funkce: a) $y = x^2 + 3x + 1$; b) $y = x^2 - x - 2$; c) $y = x^2 - 2x - 3$; d) $y = 2x^2 - x + 5$; e) $y = -x^2 + 2x - 6$; f) $y = -3x^2 + 5x - 1$. [Návod: Narýsujte přesně graf funkce $y = x^2$ na milimetrový papír, vystřihněte a okopírujte na tvrdší papír. Funkce typu a), b), c), e) lze potom snadno narýsovat. Při správné orientaci stačí okopírování.] Jak zjednodušíte úlohy typu d), f) pro grafické zobrazení?

64. Do téhož obrázku sestrojte graf funkce $y = ax^3$ pro $a = 2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}$. Jaký vliv má znamení koeficientu této liché funkce na průběh grafu té funkce?

65. Sestrojte graf funkce a) $y = |x - 2|^2$; b) $y = -|x^2 - 2|$; c) $y = x \cdot |x|$.

66. Sestrojte graf funkce a) $y = x^{2n}$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$; b) $y = x^{2n+1}$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

$\boxed{\textbf{67.}}$ Pletivo dlouhé 8 m má ohradit obdélníkový záhon, jehož jednu stranu tvoří zeď. Jak by měl být záhon dlouhý, aby jeho obsah byl co největší?

Řešení

Obsah hledaného obdélníka označme y, jeden rozměr obdélníka ať je x metrů, druhý je pak $\frac{8 - x}{2}$ metrů. Potom pro obsah platí:

$y = x\,\frac{8 - x}{2} = 4x - \frac{x^2}{2}$. Tuto rovnici přepíšeme ve tvaru

$$y = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 8, \quad \text{tj.} \quad y - 8 = -\frac{1}{2}(x - 4)^2.$$

Její graf je parabola s vrcholem $V \equiv (4, 8)$ a osou rovnoběžnou s osou $-y$. (Přesvědčte se o tom tabulkou hodnot.) Maximum dané funkce $y = 4x - \frac{x^2}{2}$ nastává tedy pro $x = 4$ a má velikost 8. Druhý rozměr hledaného obdélníka je $\frac{8 - 4}{2}$ m $= 2$ m. Záhon bude tedy dlouhý 4 m a široký 2 m.

***68.** Objem 1 cm^3 rtuti při teplotě t °C ($t \geqq 0$ °C) se dá určit podle vztahu

$V_t = 3 \cdot 10^{-8} \cdot t^2 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot t + 1$. Jak vysoko musí vystoupit teplota, aby se objem rtuti zvětšil na 1,001 cm^3?

69. Do kužele o poloměru podstavy r a výšky v vepište válec. Určete objem válce jako funkci jeho výšky v_1. Pro které hodnoty v_1 je tato funkce definována?

70. Ze všech pravoúhlých trojúhelníků daného obsahu určete ten, jehož délka přepony je minimální.

***71.** Danou úsečku a rozdělte na dvě části tak, aby součet obsahů rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad oběma úsečkami byl minimální.

72. Do rotačního kužele vepište rotační válec, jehož plášť je největší.

73. Řešte graficky: a) $x^2 - 7x + 10 = 0$; b) $x^2 - 3x - 4 = 0$;
c) $x^2 - 5x - 14 = 0$; d) $x^2 - 13x + 42 = 0$;
e) $x^2 - 5x + 2 = 0$. [Návod: Danou rovnici $x^2 - 5x + 2 = 0$ upravte na $x^2 = 5x - 2$. Položte $y = x^2$, $y = 5x - 2$ a zobrazte obě funkce. Souřadnice průsečíků obou grafů vyhovují dané rovnici. Proč?]

74. Řešte graficky: a) $x^2 - x - 42 = 0$; b) $4x^2 - 4x - 15 = 0$;
c) $2x^2 - 3x + 8 = 0$; d) $-2x^2 + x - 1 = 0$;
e) $-3x^2 + 2x + 1 = 0$.

75. Pro které hodnoty proměnné x je hodnota funkce $y = \frac{x^2}{2}$ menší než hodnota funkce $y = 2x$? (Řešte graficky.)

76. Podobně jako v úloze 73 řešte graficky:
a) $x^3 = 8(x - 1)$; b) $x^3 - 3x + 1 = 0$; c) $x^3 - 4x - 1 = 0$;
d) $x^4 - 4x + 1 = 0$.
Řešte i tak, že najdete souřadnice průsečíků grafů příslušné funkce s osou x.

77. Řešte graficky:
a) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$; c) $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0$;
b) $x^3 - 7x^2 - 8x - 12 = 0$; d) $x^3 - 2{,}5x^2 - 4{,}5x + 9 = 0$.
[Návod: pro a) $x(x^2 + 2x - 5) = 6$, $y = x^2 + 2x - 5$, $xy = 6$.]

78. Sestavte tabulku hodnot funkcí a sestrojte graf funkcí:
a) $y = \frac{1}{x}$; b) $y = \frac{2}{x}$; c) $y = -\frac{2}{x}$; d) $y = -\frac{3{,}5}{x}$;
e) $y = \frac{1}{2x}$; f) $y = -\frac{2}{3x}$; g) $y = \frac{a}{x}$.
(a je číslo reálné. Rozlišujte $a > 0$, $a < 0$.)

79. Sestrojte graf funkce $y = \frac{1}{|x|}$. Z grafu pak určete hodnoty y pro $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2{,}3$, $x = -5$.

80. Vzduch ve válci má objem 4 dm³ při tlaku 760 torr. Sestrojte tabulku pro tlak jako funkci objemu tohoto vzduchu při stálé teplotě. [Ze zákona Boyleova: Součin objemu a tlaku plynu je při stálé teplotě konstantní.]
   a) Propočtěte tabulku pro 0,5 dm³, 1 dm³, 1,5 dm³, ..., 4 dm³.
   b) Napište vzorec. (Nepřímá úměrnost.)
   c) Narýsujte graf, v němž 1 dm³ je vyjádřen úsečkou 2 cm, 100 torr úsečkou 1 cm.

81. Čtverec o obsahu 2,25 m² má být přeměněn v obdélník o stejném obsahu. Vyjádřete jednu stranu obdélníka jako funkci druhé a určete oba rozměry, je-li jeden z nich vyjádřen celistvým počtem metrů.

82. Obdélníková parcela o rozměrech $a = 24$ m, $b = 15$ m má být vyměněna za stavební místo stejné výměry (také obdélníkového tvaru), a to s jedním rozměrem a) 5 m, b) 30 m, c) 90 m. Určete druhý rozměr. Znázorněte graficky.

83. Pumpou čerpající 3,5 litru vody za vteřinu se vyčerpá stavební jáma za 10 hodin. Jak dlouho bude vodu čerpat pumpa, která vyčerpá za vteřinu 7 (10,5; 6; 25) litrů vody?

84. Ze dvou ozubených do sebe zapadajících kol má jedno 42, druhé 119 zubů. Kolikrát se otočí první, když druhé udělá 12 (30, 270) otoček?

85. Převodník u jízdního kola má 28 (36) zubů. Převodové kolečko na zadním kole má 8 (10) zubů. Kolikrát se otočí zadní kolo, šlápneme-li oběma nohama 112krát (180krát)? Kolik metrů tím ujedeme, má-li zadní kolo obvod 175 (190) cm?

86. Jedno rameno páky je 80 cm (q cm) dlouhé a je zatíženo břemenem 20 kp (Q kp). Jakou silou je možno udržet toto břemeno v rovnováze, má-li rameno síly délku 10 cm (p cm, 20 cm, 50 cm, 800 cm, 120 cm, 400 cm)?

87. V uzavřeném elektrickém obvodu se zdrojem, jehož vnitřní odpor je zanedbatelný, a s odporem 8 Ω teče proud 4,2 A. Jak se změní proud, zmenšíme-li odpor o 1 Ω? (Proud je nepřímo úměrný odporu.)

$\boxed{88.}$ Sestrojte graf racionální lomené funkce $y = \frac{x-1}{x-2}$.

Řešení

Tato funkce je definována na množině $x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ a nabývá hodnot $y \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Provedeme-li naznačené dělení, dostaneme:

$y - 1 = \dfrac{1}{x-2}$, kde $x \neq 2$. Položme $y' = y - 1$, $x' = x - 2$ a pak daná funkce má tvar $y' = \dfrac{1}{x'}$. Její graf (jak plyne z tabulky hodnot) je rovnoosá hyperbola s větvemi v prvním a třetím kvadrantu. Její asymptoty tvoří osy souřadnic x', y'. V původní soustavě souřadnic má tedy střed hyperboly souřadnice $0' \equiv (2,1)$.

89. Sestrojte graf funkce $y = \dfrac{x+1}{|x-1|}$.

Řešení

Definiční obor této funkce jsou všechna čísla reálná kromě 1. Rozlišujeme tedy dva případy: a) $x > 1$, potom $|x-1| = x - 1$; b) $x < 1$, pak $|x-1| = -(x-1)$. Graf funkce v případě a) je hyperbola rovnoosá, jejíž větev leží v prvním a třetím kvadrantu a střed $O' \equiv (1,1)$. V případě b), tj. pro $x < 1$, platí

$y = \dfrac{x+1}{-(x-1)} = -1 + \dfrac{2}{-x+1} = -1 - \dfrac{2}{x-1}$, neboli $y + 1 = -\dfrac{2}{x-1}$. Střed této hyperboly je v bodě $O'' \equiv (1, -1)$. Její graf $y' = -\dfrac{2}{x'}$, kde $x' = x - 1$, $y' = y + 1$. Větve této rovnoosé hyperboly se středem O'' leží ve druhém a čtvrtém kvadrantu.

Závěr: Graf celé funkce $y = \dfrac{x+1}{|x-1|}$ se skládá tedy ze dvou částí. Jednu část tvoří větev rovnoosé hyperboly v prvním kvadrantu (pro $x > 1$), druhou část větev rovnoosé hyperboly ve druhém kvadrantu se středem v bodě $O'' \equiv (1, -1)$.

90. Sestrojte graf funkce: a) $y = \dfrac{1}{x+3}$; b) $y = \dfrac{1}{x-2}$; c) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$; d) $y = \dfrac{x-2}{x+1}$; e) $y = \dfrac{x-3}{x-2}$; f) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$; g) $y = \dfrac{x-5}{2x}$.

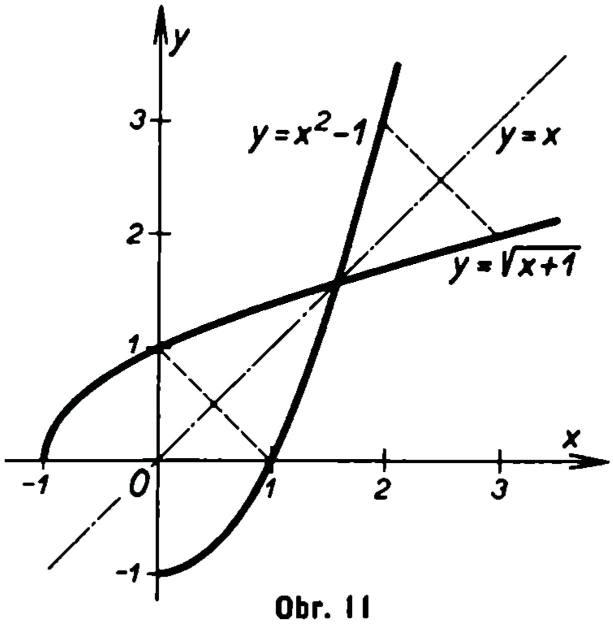
91. Sestrojte graf funkce: a) $y = \dfrac{2x-3}{3x-1}$; b) $y = \dfrac{6x-7}{4x-2}$; c) $y = \dfrac{6x-4}{6-9x}$.

92. Sestrojte graf funkce: a) $y = \dfrac{1}{|x+1|}$; b) $y = \dfrac{x-1}{|x+1|}$; c) $y = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$; d) $y = \dfrac{|x-1|}{x+1}$.

93. Definujte inverzní funkci. Určete inverzní funkci k funkci $y = x^2 - 1$.

Řešení

Definiční obor dané funkce $y = x^2 - 1$ jsou čísla z intervalu $(-\infty, \infty)$. Pro vytvoření inverzní funkce musíme však tento interval zúžit tak, aby v něm daná funkce byla prostá. Takový interval pro naši funkci je např. $x \in \langle 0, \infty)$. Pro x z tohoto intervalu nabývá pak funkce $y = x^2 - 1$ hodnot $y \in \langle -1, \infty)$. Inverzní funkci k funkci dané vyjádříme takto:
1. Zaměníme nezávisle proměnnou x za závisle proměnnou y a také y za x, tj. $x = y^2 - 1$.
2. Tuto závislost vyjádříme ve tvaru $y = f(x)$, tj. pro náš případ $y = \sqrt{x + 1}$. Tato funkce inverzní vůči funkci dané je definována na množině $x \in \langle -1, \infty)$ a pro všechna x tohoto definičního oboru nabývá hodnoty $y \in \langle 0, \infty)$.
3. Z tabulky hodnot sestrojíme graf původní i inverzní funkce. Grafy obou funkcí jsou zřejmě souměrné podle osy prvního a třetího kvadrantu. (To vyplývá i z toho, že jsme zaměnili proměnné x a y.) Definiční obor původní funkce je proto týž jako funkční obor funkce inverzní a také obor funkčních hodnot inverzní funkce je týž jako definiční obor funkce původní. (Obr. 11.)



Obr. 11

94. K daným funkcím určete funkce inverzní, najděte jejich definiční a funkční obor a nakreslete jejich grafy:
a) $y = 2x + 3$; b) $y = x^3$; c) $y = 2^x - 1$; d) $y = \sqrt{x}$, $x \geqq 0$;
e) $y = \frac{1}{x}$; f) $y = x^2 + 1$; g) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

3. OPAKOVÁNÍ

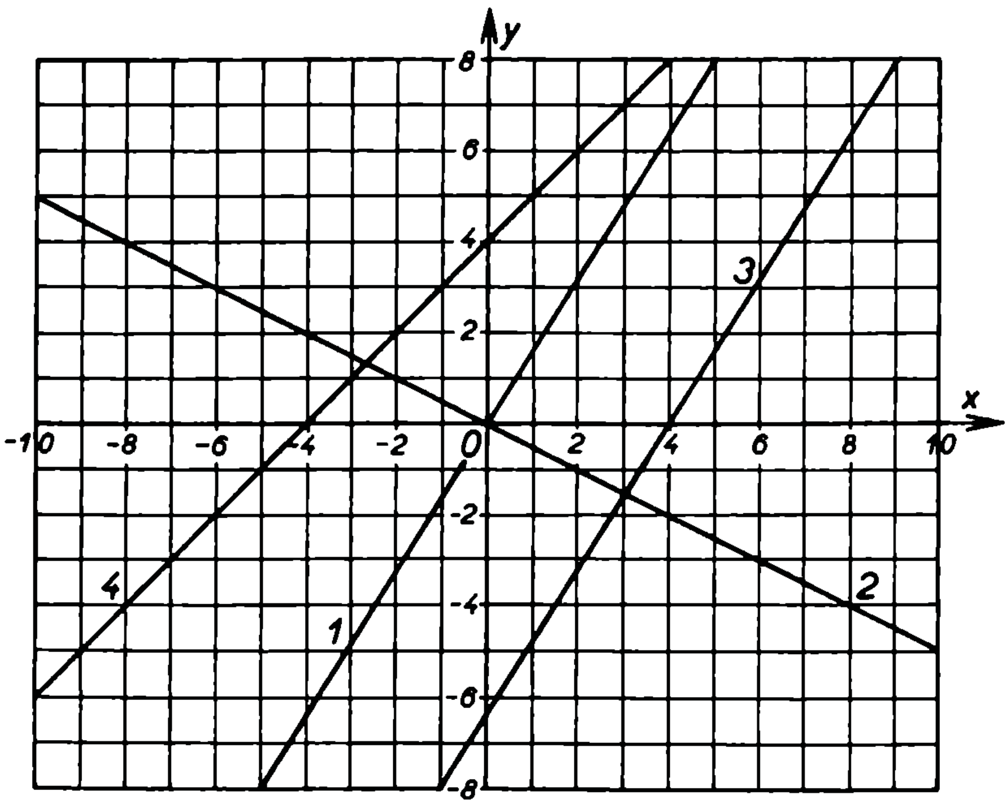
95. Do koule o daném poloměru r je vepsán rotační válec. a) Vyjádřete jeho objem V jako funkci jeho výšky x. Pro která x je objem V definován?
b) Určete množinu čísel, jichž nabývá objem válce pro všechna x z definičního oboru.

96. Vlak se rozjíždí pohybem rovnoměrně zrychleným podle vztahu $s = at^2 + bt + c$. Určete závislost dráhy s na čase t, víte-li, že za 4 s urazí dráhu 50 m, za 10 s dráhu 305 m.

97. Který mnohočlen třetího stupně má pro $x = -1, 0, 1, 2$ hodnotu $y = 9, 2, 1, 12$? [Návod: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.]

98. Vlak vyjel ze stanice A a pohyboval se rovnoměrně zrychleně. Po 2 km dosáhl rychlosti 40 km/h. Touto rychlostí jel pak rovnoměrně. Sestrojte graf dráhy s jako funkci času t. (Sestavte nejprve příslušnou funkci. Uvažte, kde bude vlak za dobu t při rovnoměrném pohybu.) Ověřte si výpočtem údaje grafu též pro některé další hodnoty t. Například pro $t = 2,5$ h, $t = 4,5$ h.

99. Vyjádřete vzorcem funkce, jejichž grafy jsou na obr. 12.



Obr. 12

100. Následující lineární rovnice vyjádřete ve tvaru funkce $y = kx + q$, sestrojte graf a určete několik dvojic x, y, které vyhovují dané funkci:

a) $5x - 8y = 4x - 9y + 3$;

b) $(x - y)\,5 = 4(x - y) + 2$;

c) $\dfrac{x+y}{5} - \dfrac{x-y}{4} = \dfrac{x-1}{10}$.

101. Bronz se skládá z mědi, zinku a olova. Na 17 dílů mědi připadá 1 díl olova a dva díly zinku. Kolik kilogramů mědi, zinku a olova je v 4 q bronzu?

102. Pro které a bude graf funkce $y = ax + 1$ rovnoběžný s grafem funkce $y = -2x + 3$?

103. Kolo o průměru d se otočilo na dráze 60 metrů n-krát. Vyjádřete závislost počtu obrátek kola na jeho průměru a zobrazte to graficky.

104. Vodorovný trám určitého průřezu, na jednom konci upevněný, na druhém konci zatížený, unese při délce 4 m na volném konci 200 kg. Únosnost je nepřímo úměrná délce trámu. Jak by musel být trám nejvýše dlouhý, aby unesl a) 500 kg, b) 400 kg, c) 100 kg, d) 25 kg?

105. Určete funkci vyjadřující závislost velikosti úhlu v obloukové míře na velikosti úhlu x měřeného ve stupních. Jak velký je úhel v míře stupňové, je-li jeho velikost v míře obloukové rovna 1?

106. Dokažte, že mají nekonečně mnoho řešení soustavy rovnic:

a) $x - y = 5$, $3x = 15 + 3y$; b) $x + y = 3$, $\frac{x}{2} + 0{,}5\,y = 1{,}5$; c) $x = 4 - y$, $y = 4 - x$.

Početně i graficky.

107. Dokažte početně i graficky, že nemají řešení rovnice:

a) $x + y = 1$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 2$; b) $x - y = 4$, $2x - 2y = 5$; c) $x + y = 3$, $y = \frac{7 - 2x}{2}$.

108. Sestavte tabulku hodnot a sestrojte graf funkce:

a) $y = |x| - x$; b) $y = -|x - 2|$; c) $y = |2x - 1| + |x - 2| - x$.

Udejte interval, v němž je daná funkce rostoucí nebo klesající, popřípadě konstantní.

109. Sestrojte průsečíkový nomogram pro funkci $z = x + y$, když volíte z za parametr. (Např. pro $z = 0, 1, 2, \ldots, 10$.)

Určete pak z něho hodnoty z pro: a) $x = 2$, $y = 3$;
b) $x = 1{,}7$, $y = 2{,}5$;
c) $x = 4{,}8$, $y = 6{,}3$.

110. Podle předchozí úlohy sestrojte průsečíkový nomogram pro výpočet nákladů na drobné opravy, je-li celkový náklad na opravu dán výrazem $z = 2{,}24x + 1{,}15y$, kde x je cena materiálu, y odměna za práci se všemi přirážkami. Z tohoto nomogramu určete pak cenu opravy pro
a) $x = 3{,}10$ Kčs a $y = 28{,}50$ Kčs; b) $x = 2{,}09$ Kčs a $y = 14{,}80$ Kčs.

111. Zpaměti: Jak zní kvadratická funkce, jejíž graf je parabola s osou v ose

$+y$ a vrcholem v počátku? Jak zní rovnice této paraboly, je-li její vrchol posunut: a) o 2 jednotky ve směru osy y;
b) o tři jednotky ve směru osy $-y$;
c) o jednu jednotku ve směru osy x, o čtyři jednotky ve směru osy $-x$.

Jak bude znít rovnice paraboly v případě c), jestliže osa paraboly je rovnoběžná s osou $-y$?

112. Zpaměti: Určete: $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

113. V podstřeší, jehož nárys má tvar rovnoramenného trojúhelníka o délce základny b a výšce velikosti v, se má stavět obytná místnost ve tvaru kvádru. Vyjádřete obsah čelné stěny jako funkci proměnné výšky místnosti. Sestrojte graf té funkce.

114. Která kvadratická funkce má tu vlastnost, že $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$? Sestrojte její graf.

115. Řešte graficky:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$; b) $x^2 - x - 2 = 0$;
c) $x^2 - 2x - 3 = 0$.

116. a) $x^2 + x - 2 = 0$; b) $4x^2 - 4x - 15 = 0$;
c) $2x^2 + x - 6 = 0$; d) $2x^2 - 5y - 3 = 0$.

117. Řešte graficky:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; b) $x^2 + x - 1 = 0$;
c) $4x^2 - 7x + 3 = 0$; d) $xy = 10$, $x + y = 7$.

118. Určete početně i graficky extrémní hodnoty funkcí:

a) $y = 2x^2 - 4x + 5$; b) $y = -x^2 + 3x - 1$;
c) $y = 0{,}3x^2 - 0{,}9x + 8$; d) $y = 3x^2 - 8x + 7$.

119. Sestrojte graf funkce:

a) $y = x + \frac{1}{x}$; b) $2y = \pm\sqrt{100 - x^2}$;
c) $y = \pm x\sqrt{100 - x^2}$; d) $y = \pm\sqrt{-x-2}$.

***120.** Z plechové desky tvaru kruhu o poloměru velikosti r je vyříznuta kruhová výseč se středovým úhlem φ a svinuta do tvaru nálevky. Při které velikosti úhlu φ je objem nálevky největší?

***121.** Obvod kruhové výseče je 100 m. Při kterém poloměru je její obsah největší?

122. Zdánlivý odpor oscilačního obvodu, v němž jsou spojeny v sérii cívka s indukčností L a odporem R (i s přívodními dráty) s kondenzátorem s kapacitou C, je dán výrazem:

$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$, kde $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence oscilací.

Určete, jakou frekvenci musí mít oscilace, aby odpor oscilačního obvodu byl nejmenší.

123. Které z těchto předpisů znamenají tutéž funkci:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x}$, $g(x) = 1$;

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$, $g(x) = x + 1$;

c) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{2x^2 + x - 3}$, $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$.

124. Lomená racionální funkce $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ má tu vlastnost, že $f_1 = 3$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$. Určete ji a sestrojte její graf.

125. Sestrojte graf funkce: a) $y = \dfrac{x - 5}{2x}$; b) $y = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$;

c) $y = \dfrac{3x - 1}{2x - 5}$; d) $y = \dfrac{x}{3x - 1}$.

***126.** Poměr intenzity záření dopadajícího I_1 a záření odraženého I_2 při kolmém dopadu na rozhraní dvou prostředí se označuje $R = \dfrac{I_2}{I_1}$. Při průhledných prostředích (vzduch, sklo) a pro relativní index lomu n platí $R = \left(\dfrac{n - 1}{n + 1}\right)^2$. Sestrojte graf této funkce pro $1 < n < 3$.

***127.** Funkce $y = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ určuje závislost mezi indexem lomu n dané látky a její tloušťkou ϱ, která je veličině y přímo úměrná. Sestrojte pokud možno přesně graf této funkce v intervalu $1 < n < 2{,}5$.

***128.** Sestrojte graf funkce a) $y = \dfrac{2}{x + |x| - 2}$, $x \neq 1$;

b) $y = -\sqrt{2(x - |x - 2|)}$.

129. Určete hodnotu parametru p tak, aby funkce $y = x^2 - 4|x - 1| - p$ nabývala hodnoty 1 pro tři různé hodnoty proměnné x.

*130. Určete parametr p tak, aby funkce $y = \dfrac{6x - 6}{x^2 - 2x + p}$ byla definována pro všechna reálná čísla x a aby nabyla své největší hodnoty pro $x = 2$. Dokažte, že graf této funkce je souměrný podle středu $S \equiv (1,0)$.

*131. Ukažte, že graf funkce $y = \dfrac{1}{2}\left(|1 + \sqrt{4 - x^2}| + |1 - \sqrt{4 - x^2}|\right)$ v intervalu $-2 \leqq x \leqq 2$ se skládá ze 2 úseček a kruhového oblouku.

132. Určete vertikální osy souměrnosti grafů funkcí:

a) $y = ax^2 + bx + c$; b) $y = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(1 - x)^2}$;

c) $y = \sqrt{a + x} + \sqrt{b - x}$.

133. Určete střed souměrnosti grafů funkcí: a) $y = ax + b$;

b) $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$; c) $y = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{1}{x - 3}$;

d) $y = 1 + \sqrt[3]{x - 2}$.

134. Řešte graficky: a) $x^3 - 3x + 2 = 0$; b) $x^3 + \dfrac{1}{2}x - 0{,}5 = 0$;

c) $x^3 - 10x + 2 = 0$; d) $x^3 - \dfrac{2}{3}x - 0{,}7 = 0$;

e) $x^3 + x^2 - 4x - 6 = 0$; f) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.