

IX. MATEMATICKÁ INDUKCE

- Počet úhlopříček vypuklého n -úhelníka se vypočítá podle vzorce $P_n = \frac{n(n-3)}{2}$, kde n je přirozené číslo větší než 3. Dokažte jeho správnost matematickou indukcí.
- n různými přímkami, které leží v rovině a procházejí týmž bodem, je rovina rozdělena na $2n$ částí. Dokažte to.
- n bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v téže přímce, lze spojit $\frac{n(n-1)}{2}$ přímkami. Dokažte to.
- Dokažte, že platí:
 $|a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot |a_3| \dots |a_n|$.
- Dokažte matematickou indukcí, že číslo $Q_n = 5^{n+1} + 6^{2n-1}$ je dělitelné číslem 31 pro každé přirozené číslo n .

Řešení

- I. krok: Pro $n = 1$ je tvrzení správné, neboť po dosazení je $Q_1 = 5^2 + 6 = 31$.
- II. krok: Za předpokladu, že číslo Q_n je dělitelné číslem 31, dokážeme, že i číslo Q_{n+1} je dělitelné číslem 31.

Upravme Q_{n+1} takto:

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= 5^{n+2} + 6^{2n+1} = 5 \cdot 5^{n+1} + 36 \cdot 6^{2n-1} = \\ &= 5 \cdot 5^{n+1} + 5 \cdot 6^{2n-1} + 31 \cdot 6^{2n-1} = 5 \cdot (5^{n+1} + 6^{2n-1}) + \\ &+ 31 \cdot 6^{2n-1} = 5Q_n + 31 \cdot 6^{2n-1}; \text{ výsledek ukazuje, že za} \\ &\text{uvedeného předpokladu je číslo } Q_{n+1} \text{ dělitelné číslem 31.} \end{aligned}$$

Závěr: Jelikož podle I. kroku je číslo Q_n dělitelné číslem 31 pro $n = 1$, je podle II. kroku dělitelné též číslem 31 pro $n = 2$.

Jelikož je toto číslo dělitelné číslem 31 pro $n = 2$, je podle II. kroku dělitelné číslem 31 i pro $n = 3$ atd.;

je tedy číslo $Q_n = 5^{n+1} + 6^{2n-1}$ dělitelné číslem 31 pro každé přirozené číslo n .

- Dokažte matematickou indukcí, že součin $(n+1)(n+2)$ je dělitelný dvěma pro každé přirozené číslo n .
- Dokažte matematickou indukcí, že součin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný šesti.

8. Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.
9. Dokažte matematickou indukcí, že číslo $V_n = n^3 + 11n$ je dělitelné šesti pro každé přirozené číslo n .
10. Je-li $a > 1$ a n přirozené číslo, je $a^n > 1$. Dokažte to.
11. Je-li $a > 0$, $b > 0$, $a > b$ a n přirozené číslo, je $a^n > b^n$. Dokažte to.
12. Dokažte, že je $2^n > n$ pro každé přirozené číslo n .
13. Nerovnost $2^n > 2n + 1$ platí pro všechna přirozená čísla n větší než 2. Dokažte to.
14. Nerovnost $2^n > n^2$ platí pro všechna přirozená čísla n větší než 4. Dokažte to. [Návod: Sečtete nerovnosti $2^n > n^2$ a $2^n > 2n + 1$.]
15. Je-li $x > -1$, $x \neq 0$ a n přirozené číslo větší než 1, dokažte, že platí $(1+x)^n > 1+nx$.

[Návod: Ukažte nejprve, že nerovnost platí pro $n = 2$, $x \neq 0$ a potom pro $n' = n + 1$ tak, že obě strany dané nerovnosti znásobíte kladným číslem $(1+x)$.]

- 16.** Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla n platí vzorec $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$.

Řešení

- I. krok: Pro $n = 1$ je vzorec správný, neboť $2^1 = 2(2^1 - 1)$.
 II. krok: Dokážeme, že vzorec je správný též pro přirozené číslo $n' = n + 1$. Za tím účelem postupujme takto:

$$\begin{aligned} 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n'} &= 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + \\ &+ 2^{n-1} = 2(2^n - 1) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n - 2 + 2^{n+1} = \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2(2^{n+1} - 1) = 2(2^{n'} - 1). \end{aligned}$$

Výsledek správnost vzorce pro přirozené číslo $n' = n + 1$ potvrzuje.

Závěr: Uvedený vzorec platí pro všechna přirozená čísla n .

17. Dokažte matematickou indukcí, že platí:

$$\begin{aligned} \text{a) } 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) &= \\ &= \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3); \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{9}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

18. Matematickou indukci dokažte tyto vzorce:

$$\text{a) } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1};$$

$$\text{b) } \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1};$$

$$\text{c) } \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1};$$

$$\text{d) } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3};$$

$$\text{e) } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

***19. Matematickou indukci dokažte vzorce:**

$$\begin{aligned} \text{a) } 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = \\ = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}; \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \dots + \frac{n}{x^n} = \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{x^n(x-1)^2}; x \neq 0, x \neq 1.$$

***20. Dokažte matematickou indukci platnost vzorce**

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots + \sin^n x = \frac{\sin x (\sin^n x - 1)}{\sin x - 1},$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$