V. MNOŽINY

1. Čísla udávající výšky žáků vaší třídy (v cm) jsou prvky množiny $\mathbf{N}$. Jsou správné zápisy $160 \in \mathbf{N}$, $167 \in \mathbf{N}$, $180 \in \mathbf{N}$, $182 \notin \mathbf{N}$, $165 \notin \mathbf{N}$?

2. Předměty, kterým se ve vaší třídě vyučuje podle rozvrhu v úterý, jsou prvky množiny $\mathbf{Q}$. Zapište značkou, zda matematika, dějepis, chemie a ruský jazyk je či není prvkem množiny $\mathbf{Q}$.

3. Čísla udávající počty osob ve vagónech určitého osobního vlaku jsou prvky množiny $\mathbf{H}$. Může být množina $\mathbf{H}$ též prázdná? Jakými čísly jsou vyjádřeny prvky této množiny?

4. Rozhodněte o číslech a) 0,66; b) $\frac{17}{26}$; c) $\frac{0{,}5}{0{,}8}$; d) $\frac{2\pi}{9}$, zda patří nebo nepatří do intervalu $I = \langle \frac{2}{3}, \infty)$.

5. Rozhodněte, zda jsou správné zápisy množin:
a) $\{\mathbf{M};\ \mathbf{CH};\ \mathbf{D};\ \mathbf{Z};\ \mathbf{F}\} = \{\mathbf{Z};\ \mathbf{M};\ \mathbf{D};\ \mathbf{F};\ \mathbf{CH}\}$;
b) $\{\mathbf{D};\ \mathbf{M};\ \mathbf{F};\ \mathbf{Z};\ \mathbf{L}\} = \{\mathbf{M};\ \mathbf{Z};\ \mathbf{D};\ \mathbf{N};\ \mathbf{L}\}$.
Písmena jsou značky vyučovaného předmětu.

6. Rozhodněte, která z uvedených množin je konečná:
a) Množina všech prvočísel; b) množina všech přirozených čísel x, která splňují nerovnost $x < 100$; c) množina všech přirozených čísel x, která splňují nerovnost $x < 1$; d) množina všech reálných čísel x, která splňují nerovnosti $-1 \leqq x \leqq 1$.

7. Určete množinu všech uspořádaných dvojic přirozených čísel, které splňují rovnici a) $x = 5 - \frac{y}{2}$, b) $x = \frac{y}{3} - 1$ a rozhodněte, zda je tato množina konečná.

8. Označme $\mathbf{M}$ množinu všech dvojciferných přirozených čísel dělitelných šesti a $\mathbf{N}$ množinu všech dělitelů čísla 210, kteří jsou různí od čísla 1 a čísla 210. Určete, která z množin má větší počet prvků, a vypište všechny prvky, které mají obě množiny stejné.

9. Vypište prvky množiny $\mathbf{P}$ všech uspořádaných a) dvojic, b) trojic přirozených čísel, jejichž součet je 9.

10. Podle komutativního zákona zapište součin *abc* všemi možnými způsoby. Tvoří tyto zápisy množinu?

11. Jsou dány množiny $\mathbf{U} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ a $\mathbf{V} = \{5;\ 6;\ 7\}$. Utvořte množinu **M** všech uspořádaných dvojic čísel tak, aby prvé číslo ve dvojici tvořil prvek z množiny **U** a druhé číslo ve dvojici prvek z množiny **V**. Každá z těchto uspořádaných dvojic určuje v soustavě pravoúhlých souřadnic bod, jehož souřadnice udávají čísla dvojice. Sestrojte tyto body na základě prvků množiny **M** a sledujte množinu **N** všech různých pravoúhelníků, jejichž všechny vrcholy jsou v těchto bodech. Kolik prvků má množina **N**?

12. Z písmen A, B, C, D lze tvořit dvojice spojováním těchto písmen po dvou. Přihlédněme při tomto tvoření k pořadí písmen v každé dvojici, takže např. AB a BA jsou dvě různé dvojice.
a) Vypište prvky množiny **M** všech takto vzniklých dvojic.
b) Jsou-li písmeny A, B, C, D označeny po řadě různé body na přímce p, utvořte množinu **Q** všech různých polopřímek, které mají uvedené body za počáteční. Který ze zápisu $\mathbf{Q} = \mathbf{M}$, $\mathbf{Q} \neq \mathbf{M}$ je správný?

13. Jsou-li x, y souřadnice libovolného bodu X v soustavě pravoúhlých souřadnic Pxy, potom množina **M** všech bodů X, o jejichž souřadnicích platí: a) $x > 0$; b) $y \leqq 0$; c) $x = y$; d) $x \leqq y$; e) $y - x = 2$; f) $y - x < 2$; g) $y - 2x \geqq 3$ jsou buď vnitřními body poloroviny, nebo body poloroviny, nebo body přímky. Ověřte to.

14. Je dán obdélník $ABCD$. Označte E střed jeho strany BC a vypište prvky množiny **M** všech různých trojúhelníků, které mají vrcholy v bodech A, B, C, D, E. Přihlédnete-li ke shodnosti těchto trojúhelníků, můžete vytvořit čtyři různé podmnožiny množiny **M**. Vypište jejich prvky.

15. Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Určete prvky množiny **L** všech různých trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou v bodech A, B, C, D, E. Roztřiďte dále tyto trojúhelníky tak, aby vznikly dvě skupiny trojúhelníků navzájem shodných; těmi jsou určeny dvě množiny **K** a **R**. Zapište jejich prvky a vztahy mezi množinami **K**, **L** a množinami **R**, **L**.

16. Je-li **M** množina všech rovnoramenných trojúhelníků a **N** množina všech trojúhelníků rovnostranných, rozhodněte, který ze zápisů $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$, $\mathbf{N} = \mathbf{M}$ je správný.

17. **P** je množina všech dělitelů čísla 12 a **Q** je množina všech dělitelů čísla 48. Zdůvodněte správnost zápisu $\mathbf{P} \subset \mathbf{Q}$.

18. $\mathbf{M}_1$ je množina všech kvádrů, $\mathbf{M}_2$ množina všech kvádrů, které mají dvě stěny čtvercové a $\mathbf{M}_3$ množina všech krychlí. Zapište vztahy mezi těmito množinami.

19. Je-li n přirozené číslo větší než 3, pak hodnoty výrazu $V = n + 2$

určují množinu **M** všech přirozených čísel větších než číslo 2 a hodnoty výrazu $U = \dfrac{n^2 - 9}{n - 3}$ množinu **N**.

a) Je správný zápis $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$?
b) Určete množinu čísel n, pro něž platí $\mathbf{M} = \mathbf{N}$.

20. Určete, ve kterých případech je správný zápis $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, je-li:
a) **A** množina všech prvočísel a **B** množina všech čísel lichých;
b) **A** množina všech hodnot výrazu $V = 2^n$, **B** je množina všech hodnot výrazu $U = 2n$, kde n je číslo přirozené; c) **A** je množina všech hodnot výrazu $Q = 2n$, **B** je množina všech hodnot výrazu $N = 2n - 1$, kde n je číslo přirozené. Stanovte množinu čísel n, pro která platí $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

21. Je dána množina **M** všech reálných čísel x, která splňují nerovnosti $0 \leqq x \leqq 1$ a množina **N** všech reálných čísel y, která splňují nerovnosti $0 \leqq y < 1$. Která z obou množin je částí množiny druhé?

22. **P** je množina všech dvojciferných přirozených čísel dělitelných číslem 12 a **Q** množina všech dvojciferných přirozených čísel dělitelných číslem 18. Vypište prvky množiny **R**, která je sjednocením množiny **P** a **Q** a prvky množiny **S**, která je průnikem obou množin.

23. „Bramborové“ brigády se účastnilo **M** žáků jedné třídy, „lesní“ brigády **N** žáků téže třídy. Určete sjednocení a průnik obou těchto množin. Proveďte i pro údaje z vaší třídy.

24. **A** je množina všech přímek, které procházejí bodem $M \equiv (2; 3)$ a **B** množina všech přímek rovnoběžných s osou x. Určete množinu $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.

25. Určete průnik a sjednocení množin z úlohy 16 a 20.

26. **M** je množina všech reálných čísel x, která splňují nerovnosti $-2 < x < 5$, **N** je množina všech reálných čísel y, která splňují nerovnost $|y| < 4$. Určete množinu $\mathbf{R} = \mathbf{M} \cup \mathbf{N}$ a množinu $\mathbf{S} = \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$.

27. **A** je množina všech přirozených čísel dělitelných dvěma, **B** množina všech přirozených čísel dělitelných třemi, **C** množina všech přirozených čísel dělitelných šesti a **D** množina všech přirozených čísel dělitelných čtyřmi. Kontrolujte správnost zápisů:

$\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{D}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{B}$, $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A} \cup \mathbf{D}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C} \cup \mathbf{D}$, $\emptyset = \emptyset \cap \mathbf{B}$.

28. Určete výsledný interval a znázorněte:
a) $\langle 2,5) \cup (4,7\rangle$; b) $(-2,3) \cup \langle 3,6)$; c) $\langle -1,2) \cap (2,3\rangle$;
d) $[(-\infty, 3) \cup \langle 3,5)] \cap (2,5)$.

[Návod: Používejte číselné osy.]

29. Znázorněte a určete výsledný interval:

a) $(2,3) \cup (1,5)$; b) $(-1,2) \cap (2,3)$; c) $(3,7) \cup \langle 7,8)$;
d) $\langle -10, -2\rangle \cap \langle -2,0)$; e) $(-1; 1,4\rangle \cap \langle \sqrt{2},3)$;
f) $(a, a+2) \cap (a-1, a+1)$, kde a je číslo kladné.

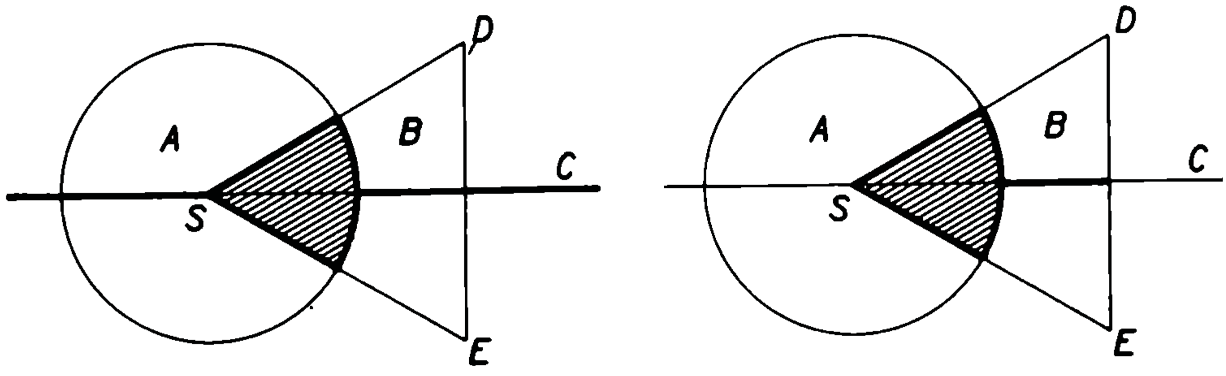
30. Jsou dány tři kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$, $k_3 \equiv (S_3; r_3)$ tak, že $r_1 > r_2 > r_3$ a $S_3 \equiv T$, kde T je bod, ve kterém se kružnice k_1, k_2 dotýkají vně. Označte po řadě $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ množiny všech vnitřních bodů kružnic k_1, k_2, k_3 a vyznačte šrafováním body množiny:

a) $\mathbf{A} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$, b) $\mathbf{B} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_3$, c) $\mathbf{C} = \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3$,
d) $\mathbf{D} = \mathbf{M}_1 \cup (\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3)$, e) $\mathbf{E} = \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$, f) $\mathbf{F} = \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_3$,
g) $\mathbf{G} = \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3$, h) $\mathbf{H} = (\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_3) \cup (\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3)$.

31. Jsou dány množiny $\mathbf{A} = (1,2,3,4,5,6)$, $\mathbf{B} = (2,4,6,8,10)$, $\mathbf{C} = (5,6,7,8,9)$. Napište množinu a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$; b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$; c) $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$; d) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$. Které z těchto čtyř množin jsou stejné a proč?

32. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$, její libovolná sečna p a úsečka SR, kde R je pata kolmice vedené z bodu S na přímku p. Označte $\mathbf{M}$ množinu všech vnitřních bodů kružnice k, $\mathbf{N}$ množinu všech bodů přímky p a $\mathbf{P}$ množinu všech bodů úsečky SR. Určete množiny: a) $\mathbf{A} = \mathbf{M} \cup \mathbf{N}$, b) $\mathbf{B} = \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$, c) $\mathbf{C} = \mathbf{M} \cap \mathbf{P}$, d) $\mathbf{D} = \mathbf{N} \cap \mathbf{P}$, e) $\mathbf{E} = \mathbf{M} \cup (\mathbf{P} \cap \mathbf{N})$. Narýsujte.

33. Nakreslete kružnici $k \equiv (S; r)$. Množinu všech bodů uvnitř kružnice označte $\mathbf{A}$. Nakreslete rovnostranný trojúhelník ESD, jehož jeden vrchol je ve středu dané kružnice a délky stran jsou rovny velikosti jejího průměru. Množinu vnitřních bodů toho trojúhelníka označte $\mathbf{B}$. Dále sestrojte osu úhlu ESD a množinu bodů této přímky označte $\mathbf{C}$. Nakreslete samostatné obrázky pro:
a) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}$; b) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$; c) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$; d) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{B}$.
(Obr. 7.)



Obr.7

34. Pro která x je interval: a) $\langle 2x, x + 3\rangle$ částí intervalu $(2,7)$; b) $(x, 5)$ částí intervalu $(-1, x + 1\rangle$; c) $(x, x + 3)$ částí intervalu $\langle 5,8\rangle$; d) $\langle x, 2x - 1\rangle$ částí intervalu $\langle -2,5\rangle$; e) $\langle 3x, 2x + 1\rangle$ je částí intervalu $(3,6)$?

35. $\mathbf{M}$ je množina všech reálných čísel x splňujících nerovnost $a < x < b$, $\mathbf{N}$ množina všech reálných čísel y splňujících nerovnost $1 < y < 8$ a $\mathbf{Q}$ množina všech reálných čísel z splňujících nerovnost $1 < z < 5$. Určete reálná čísla a, b, platí-li $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \mathbf{Q}$.

36. V soustavě pravoúhlých souřadnic Pxy vyznačte šrafováním ty body X množiny $\mathbf{M}$, jejichž souřadnice x, y splňují nerovnosti $1 \leqq x \leqq 3$, $-1 \leqq y \leqq 5$; který geometrický útvar body X vyplňují?

***37.** Je dán trojúhelník ABC, jehož úhel $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle CBA = \beta$. Vyšetřete množinu $\mathbf{M}$ všech bodů X tohoto trojúhelníka, pro něž platí $AX \geqq BX \geqq CX$.
Pomocí velikosti stran a úhlů trojúhelníka ABC vyjádřete podmínky pro to, aby: a) množinou všech bodů X byl pětiúhelník; b) množinou bodů X byl právě jeden bod; c) množina bodů X byla prázdná.
[Návod: Množinou bodů X, pro něž platí $AX \geqq BX$, je polorovina o_3B, kde o_3 je osa úsečky AB.]

$\boxed{\textbf{38.}}$ $\mathbf{M}$ je množina všech diváků určitého divadelního představení, $\mathbf{N}$ množina všech prodaných vstupenek na toto představení (v předprodeji i u pokladny). Popište, kdy jde o zobrazení množiny $\mathbf{M}$ do množiny $\mathbf{N}$, kdy přejde toto zobrazení v zobrazení množiny $\mathbf{M}$ na množinu $\mathbf{N}$ a kdy ve vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathbf{M}$ na množinu $\mathbf{N}$. Uveďte příklady.

Řešení

a) O zobrazení množiny $\mathbf{M}$ do množiny $\mathbf{N}$ jde tehdy, je-li každému diváku uvedeného představení přiřazena právě jedna vstupenka. Není tedy např. na závadu, jestliže si někdo koupil v předprodeji vstupenku a pak na představení z určitých důvodů nepřišel, aniž by jinému vstupenku předal; není totiž divákem, takže se zmenšil jen předpokládaný počet prvků množiny $\mathbf{M}$, nikoli však konstantní počet množiny $\mathbf{N}$. Nebude to však zobrazení, jestliže mezi diváky bude divák, který nemá vstupenku („černý“) nebo budou-li jednomu diváku přiřazeny např. dva lístky. (Přítel, pro kterého divák $A \in \mathbf{M}$ vstupenku koupil, se do divadla nedostavil.)

b) Jde o vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathbf{M}$ na množinu $\mathbf{N}$, je-li diváků právě tolik, co prodaných vstupenek a různí diváci vlastní různé vstupenky.

c) Jde o zobrazení množiny $\mathbf{M}$ na množinu $\mathbf{N}$, nikoli však vzájemně jednoznačné, je-li např. dvěma divákům přiřazena tatáž vstupenka (matka s dítětem na jednom sedadle).

39. **A** je množina všech občanů ČSSR, **B** množina všech dat od r. 1870. Přiřaďte každému občanu množiny **A** datum jeho narození. Uveďte příklad, kdy: a) přiřazení nebude zobrazením; b) bude zobrazením množiny **A** do množiny **B**; c) bude zobrazením množiny **A** na množinu **B**; d) půjde o vzájemně jednoznačné zobrazení množiny **A** na množinu **B**.

40. **A** je množina všech předsedů třídních výborů vaší školy, **B** množina všech učitelů na vaší škole vyučujících. Proveďte zobrazení množiny **A** do množiny **B** tak, že každému předsedovi přiřadíte jeho třídního učitele.

41. Množinu **N** tvoří příjmení všech žáků vaší třídy, množinu **V** jejich jména. Zobrazte množinu **N** na množinu **V**. (V případě, že jde o dva žáky téhož příjmení, připište k příjmení označení podle stáří.)

42. Jsou dány množiny **M** $= \{1,2; 3; 4\}$ a **N** $= \{x; y; z\}$. Uveďte alespoň jeden příklad na zobrazení množiny a) **M** do množiny **N**; b) množiny **N** do množiny **M**; c) množiny **M** na množinu **N**. Přiřazení naznačte šipkami.

43. V rovině narýsujte dvě různé úsečky $a \equiv AB$; $b \equiv CD$: a) rovnoběžné; b) různoběžné neprotínající se; c) různoběžné protínající se v bodě D. Sestrojte zobrazení (prosté) a na b.

44. Každému reálnému číslu x je přiřazena právě jedna hodnota mnohočlenu $M = x^2 + x + 1$. Je toto přiřazení zobrazením? Napište několik vzorů a jejich obrazů.

45. a) Každému bodu X v prostoru je přiřazen právě jeden kótovaný průmět X_1 na průmětně π a každému kótovanému průmětu X_1 na průmětně π právě jeden bod X v prostoru. O jaké zobrazení tu jde? b) Jaké zobrazení představuje pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny a jaké kosoúhlé promítání na jednu průmětnu?

46. Kolik je všech zobrazení množiny (a, b, c, d) do množiny $(1,2)$?