

X. POSLOUPNOSTI

I. POJEM POSLOUPNOSTI, POSLOUPNOST OHRANIČENÁ, NULOVÁ, LIMITY POSLOUPNOSTÍ

1. Zobrazte na číselné ose první tři členy posloupnosti:

a) $\{n(2 - n)\}$; b) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n + (-1)^{n+1}\right\}$.

Určete člen šestý a sedmý.

2. V soustavě pravouhlých souřadnic zobrazte prvé čtyři členy posloupnosti:

a) $\left\{\frac{12 - \frac{n}{n^2}}{n^2}\right\}$; b) $\{n + (-1)^{n+1}\}$.

Určete člen desátý.

3. Přesvědčte se, že prvních šestnáct členů posloupnosti $\{n^2 - n + 17\}$ tvoří prvočísla. Ukažte, že sedmnáctý člen posloupnosti není prvočíslo.
4. Přesvědčte se, že posloupnosti $\{2^{2n-2}\}$ a $\{n^2\}$ mají prvé dva členy stejné. V jakém poměru jsou čtvrté členy obou posloupností?
5. Přesvědčte se, že posloupnosti $\{3 - n\}$ a $\{3^n - n^3\}$ mají tři prvé členy stejné. O kolik se liší čtvrté členy obou posloupností?
6. Stanovte n -tý člen posloupností:

a) $\frac{1}{1 \cdot 3}; \frac{1}{2 \cdot 4}; \frac{1}{3 \cdot 5}; \dots$ f) $\frac{1}{1 \cdot 2}; \frac{1}{2 \cdot 3}; \frac{1}{3 \cdot 4}; \dots$

b) $\frac{1}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{7}; \frac{7}{9}; \dots$ g) $-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$

c) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \dots$ h) $\frac{1}{3}; \frac{4}{5}; \frac{9}{7}; \frac{16}{9}; \dots$

d) $0; 3; 8; 15; 24; \dots$ i) $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \frac{7}{16}; \dots$

e) $1; -1; 1; -1; \dots$

7. V posloupnosti $\{nx + y\}$ je $a_1 = 13, a_2 = 18$.

Určete čísla x a y .

8. V posloupnosti $\{n^2x + ny + z\}$ je $a_1 = 15, a_2 = 26, a_3 = 41$.

Určete čísla x, y, z .

9. Dokažte, že posloupnost $\left\{\frac{2n+1}{n+2}\right\}$ je posloupnost rostoucí.

10. Dokažte, že posloupnost $\left\{ \frac{1}{n(n+1)} \right\}$ je posloupnost klesající.
11. Pro která čísla x je posloupnost $\left\{ \frac{nx}{n+1} \right\}$ rostoucí, pro která klesající?
12. Pro která čísla x je posloupnost $\{kx^n\}$ rostoucí, pro která klesající, je-li k libovolné reálné číslo různé od nuly?
13. Napište prvních pět členů posloupnosti dané rekurentním vzorcem $a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1}$, je-li $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ a zobrazte je v soustavě pravouhlých souřadnic.
14. Napište prvních šest členů posloupnosti dané rekurentním vzorcem $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} - 2$, je-li $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ a zobrazte je na číselné ose.
15. Posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + d$, přičemž $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 10$. Určete číslo d a člen a_5 .
16. Posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$, přičemž hodnotu členu a_1 udává kořen rovnice $\frac{x^4 + x^3}{(x+2)(x-1)} = x^2 + 2$.
Napište prvé čtyři její členy.
17. Posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = (n+1)a_n - na_{n-1}$, přičemž hodnoty členů a_1, a_2 udávají kořeny rovnice $\frac{x+3}{x-2} - \frac{x-2}{x+3} = \frac{5}{6}$. Určete hodnotu čísla a_3 za předpokladu, že $a_1 < a_2$.
18. Napište prvních pět členů posloupnosti dané rekurentním vzorcem $a_{n+1} = \frac{1}{n}a_n$, jestliže hodnotu členu a_1 udává přirozené číslo vyhovující nerovnosti $\frac{3x-2}{4} - \frac{1-2x}{5} < 5 - \frac{x+1}{2}$. Kolikaznačná je úloha?

19. Určete posloupnost $\left\{ \frac{1}{n(n+1)} \right\}$ rekurentním vzorcem.

Řešení

Posloupnost $\left\{ \frac{1}{n(n+1)} \right\}$ je dána n -tým členem, který je funkcí indexu

n . Její členy jsou: $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{6}$; $a_3 = \frac{1}{12}$; ...;

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}; a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdots$$

Abychom zjistili vztah mezi členem a_{n+1} a členem a_n této posloupnosti, upravme a_{n+1} takto:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{n}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{n+2} = \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{n}{n+2} = a_n \cdot \frac{n}{n+2}. \end{aligned}$$

Rekurentní vzorec, který udává vztah mezi členem a_{n+1} a členem a_n dané posloupnosti, má tvar $a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n$.

Tímto vzorcem však daná posloupnost není ještě určena. Je třeba znát hodnotu jednoho členu posloupnosti, nejlépe členu a_1 . V našem případě je $a_1 = \frac{1}{2}$.

Závěr: Posloupnost $\left\{ \frac{1}{n(n+1)} \right\}$ je určena rekurentním vzorcem $a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n$ a prvním členem posloupnosti $a_1 = \frac{1}{2}$.

20. Určete posloupnost $\{n(n+1)\}$ rekurentním vzorcem a prvním členem.

21. Určete posloupnost $\{\log x^n\}$, $x > 0$ rekurentním vzorcem a prvním členem.

22. Určete rekurentně posloupnosti:

a) $\{n^0\}$; b) $\{3^n\}$; c) $\{2n+1\}$; d) $\{-1\}$; e) $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$; f) $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$.

23. Posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = 2 - a_n$, přičemž $a_1 = 0$. Sledujte jednotlivé členy této posloupnosti a určete její n -tý člen jako funkci indexu n .

24. Posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n - a_{n-1})$, přičemž $a_1 = 2$, $a_2 = 1$. Určete a_n jako funkci indexu n .

25. Je-li dán rekurentní vzorec posloupnosti $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, určete a_n jako funkci indexu n .

26. Je-li a) $a_{n+1} = a_n + 2$; $a_1 = 3$, b) $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot \frac{1}{a_n}$; $a_1 = 2$, určete a_n jako funkci indexu n .

27. Vyhovují-li členy posloupnosti rekurentnímu vzorci $a_{n+1} = n \cdot a_n$, vyhovují také vzorci $a_{n+1} = (n+1)a_n - (n-1)a_{n-1}$.

Dokažte. Ověřte si toto tvrzení také na členech a_3, a_4, a_5 , je-li $a_1 = a_2 = 1$.
[Návod: Z prvního vzorce plyne vztah $a_n' = (n-1)a_{n-1}$; utvořte $a_{n+1} - a_n$.]

28. Vyhovují-li členy posloupnosti rekurentnímu vzorci $a_{n+1} = (n+1)a_n + (-1)^{n+1}$, vyhovují též vzorci $a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1})$. Dokažte.
[Návod: Z prvního vzorce plyne vztah $a_n = na_{n-1} + (-1)^n$; utvořte $a_{n+1} + a_n$.]

29. Posloupnost je dána vzorcem $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$. Dokažte, že člen $a_{n+3} = -a_n$ a $a_{n+6} = a_n$.
[Návod: Z rekurentního vzorce určete a_{n+2} a a_{n+3} a sečtěte.]

30. Ověřte si na číselné ose, že posloupnost a) $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$, b) $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$ je ohraničená.

[Poznámka: Posloupnost $\{a_n\}$ je ohraničená, existuje-li kladné číslo K , které splňuje nerovnost $K > |a_n|$ pro všechny indexy n .]

- 31.** Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ohraničené, je i posloupnost $\{a_n + b_n\}$ ohraničená. Dokažte to.

Řešení

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená, existuje kladné číslo K , které splňuje nerovnost $K > |a_n|$ pro všechny indexy n . Je-li posloupnost $\{b_n\}$ ohraničená, existuje kladné číslo H , které splňuje nerovnost $H > |b_n|$ pro všechny indexy n .

Nerovnosti $K > |a_n|$, $H > |b_n|$ jsou souhlasné, mají kladné členy a můžeme je sečíst.

Platí: $K + H > |a_n| + |b_n| \geq |a_n + b_n|$ pro všechny indexy n .

Závěr: Existuje tedy kladné číslo $K + H > |a_n + b_n|$, z čehož plyne, že posloupnost $\{a_n + b_n\}$ je ohraničená.

32. Ověřte si na číselné ose, že posloupnost $\left\{ \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n} \right\} = \left\{ 2 + \frac{1}{n(n+1)} \right\}$ je ohraničená.

33. Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ ohraničené, je i posloupnost $\{a_n \cdot b_n\}$ ohraničená. Dokažte.
34. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená a c libovolné číslo, je i posloupnost $\{ca_n\}$ ohraničená. Dokažte.
35. Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ohraničené a c, d libovolná čísla, je i posloupnost $\{ca_n + db_n\}$ ohraničená. Dokažte.

36. Dokažte, že posloupnost a) $\left\{ \frac{2n}{n+1} + \frac{n+1}{3n} \right\}$, b) $\left\{ 3 + \frac{1}{2n} \right\}$ je ohraničená.
37. Která z posloupností $\{3n+5\}$, $\{2-3n\}$, $\left\{ \frac{1}{2-3n} \right\}$ je ohraničená?
38. Dokažte, že posloupnost $\{q^n\}$ je ohraničená pro každé číslo q , o kterém platí vztah $|q| = 1$.
39. Dokažte, že posloupnost $\left\{ \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \right\}$ je ohraničená.
40. Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ nulové, je i posloupnost $\{a_n + b_n\}$ nulová. Dokažte.
41. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ nulová a $\{b_n\}$ ohraničená, je posloupnost $\{a_n b_n\}$ nulová. Dokažte to. Je také posloupnost $\{ca_n\}$ nulová, kde c je libovolné číslo?
42. Dokažte, že jsou nulové posloupnosti:
- a) $\left\{ \frac{2}{n} + \frac{1}{3n} \right\}$; b) $\left\{ \frac{2n+1}{n(n+1)} \right\}$; c) $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$; d) $\left\{ \frac{n+1}{n^2} \right\}$; e) $\{0\}$;
 f) $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$; g) $\left\{ \frac{1+(-1)^{n+1}}{n} \right\}$; h) $\left\{ -\frac{2}{n} \right\}$; i) $\left\{ \frac{1}{2n-1} \right\}$;
 j) $\left\{ \frac{2}{1-3n} \right\}$.
43. Od kterého členu počínaje jsou všechny členy posloupnosti
- a) $\left\{ \frac{1}{2+3n} \right\}$, b) $\left\{ \left| \frac{1}{1-2n} \right| \right\}$ menší než $\frac{1}{1000}$?
44. Dokažte, že posloupnost $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$ má limitu rovnou číslu 1.
45. Je-li $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, dokažte, že platí:
- a) $\lim (a_n + b_n) = a + b$; b) $\lim (a_n - b_n) = a - b$;
 c) $\lim a_n b_n = ab$; d) $\lim ca_n = ca$; c je libovolné číslo;
 e) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$.
46. Určete limitu posloupnosti $\{ra_n + sb_n\}$, je-li $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a r, s jsou libovolná čísla.
47. Určete limitu posloupnosti $\{a_n^r\}$, je-li $\lim a_n = a \neq 0$ a r číslo celé.
48. Určete limitu posloupnosti $\left\{ \frac{3n+8}{n+2} \right\}$.

Řešení

Můžeme postupovat takto:

$$\begin{aligned} \text{A. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+8}{n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+6)+2}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+2)+2}{n+2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 3 + 2 \cdot 0 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+8}{n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{8}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{8}{n} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + 8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \\ &= \frac{3 + 8 \cdot 0}{1 + 2 \cdot 0} = 3. \end{aligned}$$

$$\text{Závěr: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+8}{n+2} = 3.$$

49. Jakou limitu mají posloupnosti:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left\{ \frac{2n+1}{n+2} \right\}; \quad & \text{b) } \left\{ \frac{n^2+1}{n^2-1} \right\}; \quad & \text{c) } \left\{ \frac{2n}{n^2+1} \right\}; \quad & \text{d) } \{2^n\}; \\ \text{e) } \{(-1)^n\}; \quad & \text{f) } \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}; \quad & \text{g) } \left\{ \frac{2n^2+3n-1}{3n^2-2n+1} \right\}. \end{aligned}$$

50. Určete limitu posloupnosti

$$\text{a) } \left\{ \left(\frac{n}{n+1} \right)^r \right\}, \text{ kde } r \text{ je číslo celé;}$$

$$\text{b) } \left\{ \frac{an+b}{cn+d} \right\}, \text{ jsou-li } a, b, c, d \text{ libovolná čísla, přičemž } c \neq 0;$$

$$\text{*c) } \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, n \text{ je číslo přirozené.}$$

2. ARITMETICKÉ A GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI

51. Určete prvních pět členů posloupnosti $\{1+3n\}$, $\left\{ \frac{a+n}{2} \right\}$, $\{2+bn\}$ a dokažte, že jsou aritmetické. Stanovte jejich difference a rekurentní vzorce.

52. Napište první čtyři členy posloupnosti $\left\{ \frac{a + 1 - 2n}{b} \right\}$, $b \neq 0$ a dokažte, že je aritmetická. Určete její diferenci a rekurentní vzorec. Pro která čísla b je tato posloupnost rostoucí?
53. Určete, za kterých podmínek je posloupnost $\left\{ \frac{a + bn}{c} \right\}$, $c \neq 0$ posloupností rostoucí, za kterých klesající a kdy se stane posloupností, v níž všechny členy jsou si rovny.
54. Sledujte posloupnost $a_1 = \frac{n-1}{n}$, $a_2 = \frac{n-2}{n}$, $a_3 = \frac{n-3}{n}$ atd.
Jak velká je její diference, n -tý člen a součet prvních n -členů?
55. Ukažte, že součet prvních n -členů posloupnosti $\{2n - 1\}$ je $S_n = n^2$. Z toho plyne, že druhou mocninu každého přirozeného čísla lze nahradit součtem lichých, po sobě jdoucích přirozených čísel, z nichž nejmenší je 1. Na základě toho rozepište čísla 16, 49, 100. Čím je udán počet sčítanců takového součtu?
56. Oč je součet prvních 100 přirozených čísel sudých větší než součet prvních 100 přirozených čísel lichých?
57. Který člen posloupnosti přirozených čísel se rovná součtu všech členů předcházejících?
58. Upravte výraz: $\frac{n^4 + n}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$.
59. Určete součet všech navzájem různých přirozených čísel vyhovujících nerovnosti:
$$2 \left(\frac{15x}{2} + 3 \right) - \frac{42 - 9x}{2} < 6 \cdot (3x + 1).$$
60. V aritmetické posloupnosti je první člen $a_1 = 1$ a diference $d = 3$. Určete člen a_n a ukažte, že je funkcí počtu členů n . Načrtněte graf této funkce v soustavě pravoúhlých souřadnic.
61. V aritmetické posloupnosti je první člen $a_1 = 1$ a diference $d = 2$. Určete součet prvních n -členů S_n a ukažte, že je funkcí počtu členů n . Načrtněte graf této funkce v soustavě pravoúhlých souřadnic.
62. Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti je $n + n^2$. Stanovte její diferenci a r -tý člen.
[Návod: $a_1 = 1 + 1^2$, $a_1 + a_2 = 2 + 2^2$, $a_1 + a_2 + a_3 = 3 + 3^2$, atd.; odtud lze zjistit velikost jednotlivých členů posloupnosti a diferenci.]
63. Součet prvních n -členů aritmetické posloupnosti je $4n^2 - 3n$. Určete diferenci a n -tý člen.

64. V aritmetické posloupnosti je první člen $a_1 = 3$, difference $d = 2$. Kolik členů dává součet $S_n = 120$?
65. Doplňte zbývající čísla v tabulce:

a_1	d	n	a_n	S_n
1	$\frac{2}{3}$	100		
0			5	27,5
-6	$\frac{3}{4}$		$15 + \frac{3}{4}$	
	2		-10	-360

66. V aritmetické posloupnosti je člen $a_4 = a$, $a_7 = b$. Vypočítejte difference d , členy a_1 , a_{10} a součet prvních deseti členů S_{10} . Proveďte též pro $a = 3,4$; $b = 5,8$.
67. Kolik trojčíslných čísel je dělitelných sedmi?
68. Kolik trojčíslných čísel je zakončených číslicí 6?
69. Mezi kořeny rovnice $x^2 + x - 12 = 0$ vložte třináct čísel tak, aby s těmito kořeny tvořila prvních 15 členů aritmetické posloupnosti. Vypište členy této posloupnosti.
70. Mezi čísla $\frac{a-b}{2}$ a $\frac{a+b}{2}$ vložte tři čísla tak, aby s danými čísly tvořila prvních 5 členů aritmetické posloupnosti. Vypište členy této posloupnosti.
71. Mezi čísla 1 a 25 vložte tolik čísel, aby s danými čísly tvořila aritmetickou posloupnost o součtu 117. Určete čísla vložená a jejich počet.
72. V které aritmetické posloupnosti platí:
 $a_1 + a_5 = 16$, $a_3 + a_4 = 19$?
73. V které aritmetické posloupnosti platí:
 $a_1 + a_7 = 22$, $a_3 \cdot a_4 = 88$?
74. V které aritmetické posloupnosti je $S_5 = S_6 = 60$?

Řešení

Zřejmě tu platí vztahy

$$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = 60 \dots \dots \dots (1),$$

$$S_6 = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = 60 \dots \dots \dots (2).$$

Jelikož $a_8 = a_1 + 4d$, $a_8 = a_1 + 5d$, dospějeme po jednoduché úpravě vztahů (1) a (2) k soustavě rovnic

$$a_1 + 2d = 12,$$

$$2a_1 + 5d = 20,$$

$$\text{odkud } a_1 = 20, d = -4.$$

Závěr: V posloupnosti 20, 16, 12, 8, 4, 0, ... je $S_5 = S_6$.

75. Číslo 55 rozložte v součet takových čísel, aby každé následující bylo o 4 větší než předcházející a poslední bylo 19. Která jsou to čísla a kolik je jich?
76. Součin tří po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti se rovná jejich součtu. Určete tyto členy, víte-li, že difference posloupnosti je $\frac{13}{3}$.
[Návod: Za neznámou volte prostřední člen.]
- *77. Najděte tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, víte-li, že jejich součet je $3x$ a jejich součin $x^3 - 4$, přičemž $x > 0$. Pro která čísla x jsou tyto členy racionální?
78. Součet prvních devíti členů aritmetické posloupnosti je 108. Určete je, víte-li, že jsou to čísla přirozená.
[Návod: Snažte se dospět k rovnici $a_1 = 12 - 4d$, v níž d musí být číslem celým a $a_1 < 24$, neboť $a_1 + a_9 = 24$.]
79. V aritmetické posloupnosti, jejíž první člen $a_1 = 30$ a difference $d = -3$, určete člen, který se rovná $\frac{1}{8}$ součtu všech členů předcházejících.
80. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Delší odvěsna má délku 24 cm. Jak velké jsou jeho strany a úhly?
81. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou dlouhé, je-li jeho obsah 6 dm²?
82. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou velké, měří-li poloměr kružnice trojúhelníku vepsané 7 cm?
83. Existuje vypuklý n -úhelník, jehož nejmenší vnitřní úhel má velikost 126° a jehož každý následující vnitřní úhel má velikost o 4° větší než úhel předcházející?

Řešení

Předpokládejme, že takový n -úhelník existuje. Velikosti jeho vnitřních úhlů tvoří aritmetickou posloupnost, jejíž prvý člen $a_1 = 126$, difference

$d = 4$ a součet prvních n členů $S_n = (n - 2) \cdot 180$. (Údaje jsou ve stupních, n znamená počet vrcholů hledaného n -úhelníka.)

Dosadíme-li uvedené hodnoty do rovnice $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, kde $a_n = a_1 + (n - 1)d$, dospějeme k rovnici

$$(n - 2) \cdot 180 = \frac{126 + 126 + 4(n - 1)}{2} \cdot n, \text{ která po upravení má tvar}$$

$$n^2 - 28n + 180 = 0 \text{ a kořeny } n_1 = 10, n_2 = 18.$$

Úloze vyhovuje jen řešení $n_1 = 10$. (Desetiúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikosti $126^\circ, 130^\circ, 134^\circ, 138^\circ, 142^\circ, 146^\circ, 150^\circ, 154^\circ, 158^\circ, 162^\circ$, je tedy vypuklý.)

Řešení $n_2 = 18$ úloze nevyhovuje. (Osmnáctiúhelník, jehož nejmenší vnitřní úhel má velikost 126° a největší $126^\circ + 17 \cdot 4^\circ = 194^\circ$, není tedy vypuklý.)

Závěr: n -úhelník požadované vlastnosti existuje. Je to vypuklý desetiúhelník.

84. Rozměry kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou velké, měří-li jejich součet 24 cm a objem kvádru 312 cm^3 ?
85. Na střeše tvaru lichoběžníka jsou srovnány tašky do řad tak, že při hřebenu je 85 tašek a v každé následující řadě o jednu tašku více než v řadě předcházející. Kolika taškami je pokryta střecha, má-li řada při okapu 100 tašek?
86. Železné roury se skládají do vrstev tak, že roury každé vrstvy horní zapadají do mezer vrstvy dolní. Do kolika vrstev se složí 102 roury, má-li nejhořejší vrstva tři roury? Kolik rour má vrstva nejspodnější?
87. Kolikrát uhodí palička hodinového stroje v časovém intervalu od 0 hodin do 12 hodin, tluče-li vedle počtu celých hodin také všechny čtvrtě? (První čtvrt značí jedním úderem, druhou dvěma atd.)
88. Teploty Země přibývá do hloubky o 1°C na 33 m. Jaká je teplota na dně dolu 1015 m hlubokého, je-li v hloubce 25 m teplota 9°C ?
89. Volně padající těleso proběhne za první sekundu dráhu $\frac{g}{2} \text{ m}$ a za každou následující sekundu dráhu o $g \text{ m}$ větší než za sekundu předcházející. Jakou dráhu vykoná za t sekund (bez odporu vzduchu)?
90. Těleso, které se pohybuje rovnoměrně zpomalené, proběhne za první sekundu dráhu $c - \frac{a}{2}$ a za každou následující sekundu dráhu o a kratší než za sekundu předcházející. Jakou dráhu proběhne za t sekund?

91. Po kružnici se pohybují dva hmotné body M_1 a M_2 , které se začaly pohybovat současně proti sobě z téhož bodu A . Bod M_1 proběhne za první minutu oblouk příslušející středovému úhlu $\alpha_1 = \frac{R}{30} = 3^\circ$ a pak zvyšuje svoji rychlost tak, že vykazuje za každou následující minutu přírůstek oblouku příslušný středovému úhlu $\beta_1 = \frac{R}{90} = 1^\circ$ vzhledem k minutě předcházející.

Bod M_2 proběhne za první minutu oblouk příslušný středovému úhlu $\alpha_2 = \frac{R}{60} = 1^\circ$ a za každou následující minutu zvětšuje proběhnutý oblouk o přírůstek patřící středovému úhlu $\beta_2 = \frac{R}{15} = 6^\circ$ vzhledem k minutě předcházející. Za jakou dobu se body M_1 a M_2 poprvé setkají?

92. Na přímočaré dráze vyrazila současně z místa M dvě vozidla týmž směrem. Vozidlo A jelo rychlostí 20 m/s, vozidlo B ujelo za první sekundu 12 m a za každou následující sekundu o 2 m více než za předcházející sekundu. Za jakou dobu dohonilo vozidlo B vozidlo A ?

93. Jsou-li a, b libovolná reálná čísla, dokažte, že výrazy $(a - b)^2$, $a^2 + b^2$, $(a + b)^2$ tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

94. Je-li součet prvních n -členů aritmetické posloupnosti $S_n = 0$, je $a_n = -a_1$. Dokažte.

95. Jsou-li a_{k-1}, a_k, a_{k+1} tři po sobě jdoucí racionální členy aritmetické posloupnosti, je $a_k^2 - a_{k-1} \cdot a_{k+1}$ druhou mocninou dvojčlenu. Dokažte to.

96. Jsou-li a_{k-1}, a_k, a_{k+1} tři po sobě jdoucí racionální členy aritmetické posloupnosti, má rovnice $a_{k-1}x^2 + 2a_kx + a_{k+1} = 0$, $a_{k-1} \neq 0$ racionální kořeny. Dokažte to.

97. Dokažte, že v posloupnosti přirozených čísel má každé číslo tvaru $2k + 1$ hodnotu rovnou k -tému dílu součtu všech čísel předcházejících. Ukažte správnost tohoto tvrzení též na některých příkladech ($k = 5, 7, 10$).

98. Jestliže čísla x, y, z tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, tvoří i čísla $x^2 + xy + y^2$, $x^2 + xz + z^2$, $y^2 + yz + z^2$ tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Dokažte. [Návod: $x = y - d$, $z = y + d$.]

99. Jestliže výrazy $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$, v nichž čísla a, b, c nabývají přípustných hodnot, tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, pak také čísla a^2, b^2, c^2 tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Dokažte.

Řešení

Jelikož mezi třemi po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti

a_k, a_{k+1}, a_{k+2} platí vztah $a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k+2}}{2}$, jsou vázána čísla a, b, c vztahem

$$\frac{1}{a+c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \right).$$

Tento vztah upravujeme takto:

$$\frac{1}{a+c} = \frac{a+2b+c}{2(a+b)(b+c)},$$

$$2(a+b)(b+c) = (a+c)(a+c+2b),$$

$$2(a+b)(b+c) = (a+c)^2 + 2b(a+c),$$

$$2ab + 2b^2 + 2ac + 2bc = a^2 + 2ac + c^2 + 2ab + 2bc,$$

$$2b^2 = a^2 + c^2,$$

$$b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}.$$

Poslední rovnice ukazuje, že čísla a^2, b^2, c^2 tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

Závěr: Tvoří-li výrazy $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, pak tuto vlastnost mají i čísla a^2, b^2, c^2 .

100. Stanovte prvních pět členů posloupnosti $\{3^{n-2}\}, \left\{\frac{5c^{n+2}}{2}\right\}, \left\{\frac{x^{n-1}}{y^{n+3}}\right\}$, $x \neq 0, y \neq 0$ a ukažte, že jsou geometrické. Určete jejich kvocienty a rekurentní vzorce.

101. Napište prvé čtyři členy posloupnosti $\left\{\frac{2}{x^n}\right\}$, $x > 0$; pro která čísla x je posloupnost rostoucí, pro která klesající a pro která jsou všechny členy posloupnosti sobě rovny? Dokažte dále, že posloupnost je geometrická.

102. V geometrické posloupnosti je první člen $a_1 = 1$ a kvocient $q = 2$. Určete člen a_n a ukažte, že je funkcí počtu členů n . Znázorněte graf této funkce v soustavě pravouhlých souřadnic.

103. Jak velký je součet prvních pěti členů posloupnosti $\left\{\frac{3^{n-1}}{2^{n-8}}\right\}$?

104. Jak velký je součet prvních n členů posloupnosti $\left\{\frac{2^n - 1}{2^n}\right\}$?

$$\left[\text{Návod: } \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}; S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n. \right]$$

105. V geometrické posloupnosti je $a_1 = 81$, $a_2 = 54$. Určete součet všech těch členů posloupnosti, jež jsou čísla celá.
106. Doplňte zbývající čísla v tabulce:

a_1	q	n	a_n	S_n	a_1	q	n	a_n	S_n
1	3	10			$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{128}$	$\frac{127}{128}$
	$\frac{1}{2}$	8	2		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6561}$	
2		7	1458						
	3		567	847					
						-2	19	262 144	
						-3	4	121,5	

107. Je dána posloupnost $a_1 = a^{10}$, $a_2 = a^9b$, $a_3 = a^8b^2$ atd. Určete její kvocient, n -tý člen a součet prvních n členů.
108. V geometrické posloupnosti je $a_2 = a$, $a_5 = b$. Určete jedenáctý člen.
109. Jsou-li a , b reálná čísla a $a + b \neq 0$, $a - b \neq 0$, dokažte, že výrazy $(a - b)^2$, $\frac{a - b}{a + b}$, $\frac{1}{(a + b)^2}$ tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.
110. Jestliže v rovnici $ax^2 + 2bx + c = 0$ tvoří nenulová čísla a , b , c tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, má rovnice dvojnásobný kořen. Dokažte.
 · [Návod: $a = \frac{b}{q}$, $c = bq$.]
111. V geometrické posloupnosti je kvocient $q = 2$, n -tý člen $a_n = 5 \frac{1}{3}$ a součet prvních n členů $S_n = 10 \frac{1}{2}$. Určete počet členů.
112. Udejte velikost součinu prvních n členů geometrické posloupnosti na základě a_1 , q , n .
113. Mezi kořeny rovnice $x^2 - 9x + 8 = 0$ vložte dvě čísla tak, aby vznikly čtyři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Vypište je.
114. Mezi čísla a^3 a b^8 ($a \neq 0$, $b \neq 0$) vložte sedm čísel tak, aby vznikla geometrická posloupnost. Vypište její členy.

115. Mezi čísla 5 a 640 vložte tolik čísel, aby vznikla geometrická posloupnost, v níž součet vložených čísel je 630. Vypište je.
116. Součet čtyř po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti je 80. Určete je, víte-li, že člen poslední je devětkrát větší než člen druhý.
117. V geometrické posloupnosti je $a_2 - a_1 = 15$, $a_3 - a_2 = 60$. Určete S_4 .
118. V geometrické posloupnosti je $a_1 + a_2 + a_3 = 35$, $a_4 + a_5 + a_6 = 280$. Určete prvních šest členů.
119. Jak velký je pátý člen geometrické posloupnosti, ve které platí: $a_1 + a_4 = 56$, $a_2 + a_3 = 24$?
120. Přičteme-li k číslům 2, 7, 17 totéž číslo, vzniknou prvé tři členy geometrické posloupnosti. Určete je.

Řešení

Označme x číslo, které je nutno přičíst k číslům 2, 7, 17, aby vznikly tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Potom $a_1 = 2 + x$, $a_2 = 7 + x$ a $a_3 = 17 + x$. Jelikož mezi třemi po sobě jdoucími členy geometrické posloupnosti a_k, a_{k+1}, a_{k+2} platí vztah $a_k^2 \cdot a_{k+2} = a_{k+1}^3$, je

$$(7 + x)^2 = (2 + x)(17 + x).$$

Uvedené rovnici vyhovuje číslo $x = 3$.

Jsou tedy členy naší posloupnosti $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 20$.

Závěr: Přičteme-li k číslům 2, 7, 17 číslo 3, vzniknou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti 5, 10, 20.

121. Délky stran a, b, c trojúhelníka ABC tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Jak jsou velké, je-li jeho obvod $o = 42$ cm a délka strany $b = 8$ cm?
122. Kratší úhlopříčka, strana a delší úhlopříčka kosočtverce mají délky, které tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Vypočítejte velikosti úhlů kosočtverce.
- *123. Obsah rovnoramenného lichoběžníka $P = 54$, součin délek obou základů $z_1 \cdot z_2 = 18$. Jak velké jsou jeho úhly, tvoří-li z_1, z_2 a výška v tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti?
124. Jak velký je ostrý úhel α , tvoří-li $\sin \alpha, \tan \alpha, \frac{1}{\cos \alpha}$ tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti?
125. Je dán čtverec, jehož strana má délku a . Spojíte-li středy jeho stran, dostanete nový čtverec, spojte-li středy stran tohoto nového čtverce, dostanete zase čtverec atd. Jak velký je obsah čtverce, který vznikne desátým členěním?

- *126.** Je dán čtverec, jehož strana má délku a . Rozdělte každou jeho stranu na tři stejné díly a nad každým středním dílem sestrojte čtverec vně obrazce. Každou stranu takto vzniklého útvaru rozdělte opět na tři stejné díly a nad středními díly sestrojte čtverec vně útvaru atd. Kolik stran a jak velký obvod má útvar, který vznikne, opakuje-li se postup n -krát?
- 127.** Povrch kvádrů je 78 cm^2 , součet jeho rozměrů 13 cm . Jak velký je jeho objem, tvoří-li rozměry tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti?
- 128.** Baktérie se množí půlením tak, že k dělení dojde v příznivých podmínkách vždy za půl hodiny. Kolik bakterií vznikne za 12 hodin z jedné bakterie?
- 129.** V nádobě je m gramů radonu. Jaké množství radonu zbude v nádobě za 36 dní, je-li poločas rozpadu radonu 4 dny? (Za každé 4 dny se rozpadne polovina jeho množství.) Jaké množství radonu by zbylo v nádobě za $4 \cdot t$ dny? Seřadte jednotlivá množství radonu za $4 \cdot t$ dny do posloupnosti a vyšetřete ji ($t = 0, 1, 2, \dots$).
- 130.** Poločas rozpadu rádia C je asi 20 minut. Jaké množství rádia C zbude za 4 hodiny z původního množství 1 mg ? Jaké množství zbude za dobu t (v hodinách)?
- 131.** Tlaku vzduchu ubývá se stoupající výškou asi o $1,2 \%$ na každých 100 m při stálé teplotě. Jaký je tlak na vrcholu Sněžky, je-li tlak na hladině mořské 760 torr ? [Návod: Ve výšce $n \cdot 100 \text{ m}$ je barometrický tlak $b = 760 \left(1 - \frac{1,2}{100}\right)^n \text{ torr}$. Proč?]
- *132.** Dokažte, že pro vypočítání výškového rozdílu dvou míst platí přibližný vzorec $d = 19\,230 (\log b_1 - \log b_2)$, v němž b_1 a b_2 jsou naměřené tlaky ve výškách h_1 a h_2 ($h_2 > h_1$). [Návod: Jako ve cvičení předešlém. Podíl $b_2 : b_1$ pak logaritmujte.]
- 133.** Z jaké výšky byla spuštěna pružná koule, která se odrazila od země celkem osmkrát a po osmém odrazu odskočila ještě do výše $\frac{1}{2} \text{ m}$, vyletěla-li po každém dopadu do $\frac{4}{5}$ té výše, ze které spadla?
- *134.** V temperovaném ladění se dělí každá oktáva na 12 půltónů, jejichž kmitočty tvoří geometrickou posloupnost. Jak velký je kvocient této posloupnosti? Jaké kmitočty mají tóny c^1, d^1 , má-li tón a^1 kmitočet 440 Hz ?
- 135.** V nádobě je 25 l vody s teplotou 100°C . Odebere se 1 l a nalije se místo něho 1 l vody s teplotou 0°C . Pak se odebere z nádoby 1 l směsi a dolije se opět jedním litrem vody s teplotou 0°C atd. Jakou teplotu má voda

v nádobě, opakuje-li se tento postup desetkrát? Kolikrát je nutno postup opakovat, má-li teplota vody v nádobě klesnout na 50°C ?

- 136.** Roste-li výroba každý rok o 10 %, o kolik procent vzroste do konce pětiletky?

Řešení

Označíme-li V_0 objem výroby na počátku prvního roku, pak na konci prvního roku má výroba objem $V_1 = V_0 + \frac{V_0 \cdot 10}{100} = V_0(1 + 0,1) = V_0 \cdot 1,1$, na konci druhého roku objem $V_2 = V_1 + \frac{V_1 \cdot 10}{100} = V_1(1 + 0,1) = V_1 \cdot 1,1 = V_0 \cdot 1,1^2$, na konci třetího roku objem $V_3 = V_2 + \frac{V_2 \cdot 10}{100} = V_2 \cdot 1,1 = V_0 \cdot 1,1^3$, na konci čtvrtého roku objem $V_4 = V_3 + \frac{V_3 \cdot 10}{100} = V_3 \cdot 1,1 = V_0 \cdot 1,1^4$ a na konci pátého roku objem $V_5 = V_4 + \frac{V_4 \cdot 10}{100} = V_4 \cdot 1,1 = V_0 \cdot 1,1^5$.

Přiradíme-li objemu V_0 číslo 100, potom objemu V_5 je přiřazeno číslo $\frac{100 V_5}{V_0} = \frac{100 \cdot V_0 \cdot 1,1^5}{V_0} = 100 \cdot 1,1^5 \doteq 161$.

Ze srovnání čísel 100 a 161 je patrné, že do konce pětiletky vzroste objem výroby o 61 procent.

Závěr: Roste-li výroba rok od roku o 10 %, vzroste do konce pětiletky o 61 %.

- 137.** Stroj ztrácí opotřebením každý rok p procent ze své ceny. Za jakou dobu klesne jeho cena na polovinu? Též pro $p = 4,5$.
- 138.** Počet obyvatelů města vzrostl za 10 let z 25 000 na 33 600. Jaký byl roční přírůstek v procentech?
- 139.** V lese bylo odhadnuto množství dřeva na 4000 m^3 . Jaké množství dřeva bude v lese za 3 roky, jestliže se počítá s ročním přírůstkem 2,2 % a během každého roku se porazí a odveze 200 m^3 dřeva?
[Návod: Počítejte množství dřeva, které v lese zbude ke konci prvního, druhého a třetího roku.]
- 140.** Odvoďte, na jakou částku vzroste vklad K při p % celoročním složeném úrokování za n roků. Potvrďte správnost vzniklého vzorce matematickou indukcí.

[Návod: $K_1 = K + \frac{Kp}{100} = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)$, $K_2 = K_1 + \frac{K_1 p}{100} = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ atd., odtud usudíte na K_n , tj. na hodnotu vkladu K na konci n -tého roku.]

141. Na jakou částku vzroste vklad 5 000 Kčs za 12 let při 2% celoročním složeném úrokování? Na jakou částku by vzrostl uvedený vklad, kdyby se úrokovalo jednoduše? Kolik činí úroky z úroků?

[Návod: Využijte vzorce z úlohy 90.]

142. Jak velký vklad vzroste za 15 let na 1 346 Kčs, úrokuje-li se 2 % celoročně?
143. Při které procentové míře vzroste vklad uložený do peněžního ústavu za 11 let o 25 %?
144. Za jakou dobu se vklad vložený do peněžního ústavu při 2% celoročním složeném úrokování zdvojnásobí?

145. Vklady s okamžitou výpovědní lhůtou se úrokují 2 % celoročně, vklady s tříměsíční výpovědní lhůtou 3 % celoročně. Za jakou dobu vzroste 10 000 Kčs uložených na 2 % a 9 711 Kčs uložených na 3 % na stejnou výši?

Řešení

Označme x počet let, za který vzrostou obě uvedené částky na stejnou výši.

První částka vzroste při 2 % celor. slož. úrokování za x let na 10 000 . 1,02 ^{x} Kčs, druhá částka při 3 % cel. slož. úrokování za x let na 9 711 . 1,03 ^{x} Kčs.

Podle podmínky úlohy je

$$10\,000 \cdot 1,02^x = 9\,711 \cdot 1,03^x.$$

Logaritmuje-li obě strany této rovnice, dostaneme

$$4 + x \log 1,02 = \log 9\,711 + x \log 1,03, \text{ odkud}$$

$$x = \frac{4 - \log 9\,711}{\log 1,03 - \log 1,02} = \frac{4 - 3,98726}{0,01284 - 0,00860} = \frac{0,01274}{0,00424} = \frac{1274}{424} \doteq 3.$$

Závěr: Za 3 roky vzrostou obě částky na stejnou výši.

- *146. JZD si vypůjčilo 100 000 Kčs a zavázalo se, že je splatí dvěma stejnými splátkami, z nichž jedna bude splatná za dva roky, druhá za 4 roky ode

dne vypůjčení. Jak velké budou tyto splátky při 2% celoročním složeném úrokování?

[Návod: Počítejte hodnoty splátek ke dni vypůjčení.]

- 147.** Podnik má zaplatit výrobnímu družstvu za 3 roky 60 000 Kčs. Zaplatí však 50 000 Kčs ihned a zbytek chce vyplatit po roce. Kolik činí zbytek při 3 % celoročním složeném úrokování?

- 148.** Kuřák prokouří ročně průměrně 1 800 Kčs. Kolik by si uspořil za 10 let, kdyby tuto částku ukládal koncem každého roku do spořitelny při 2 % celoročním složeném úrokování?

[Návod: Prvý vklad by vzrostl do konce 10. roku na $1\,800 \cdot 1,02^{10}$, druhý na $1\,800 \cdot 1,02^9$ atd.]

- *149.** Jakou částkou, vloženou počátkem roku, se zajistí důchod ročních 1 000 Kčs, splatný vždy koncem každého roku a trvající 10 let při 2% celoročním složeném úrokování?

[Návod: Počítejte hodnoty jednotlivých částek k počátku prvního roku.]

- 150.** Národní podnik zakoupil stroj za 300 000 Kčs, a tím se zlevnil provoz v podniku o 27 000 Kčs ročně. Rozhodněte, zda koupě stroje je pro podnik rentabilní či nikoli, počítá-li se s vyřazením stroje za 15 let (3 % celoroční složené úrokování).

- 151.** Zaměstnanec podniku si nastrádal za osm let 42 000 Kčs na zakoupení auta. Jakou částku ukládal průměrně koncem každého roku? (3% p. a.)
Poznámka: Značka *p. a.* znamená celoroční slož. úrokování.

- 152.** Student zdědil po svých rodičích 30 000 Kčs, které uložil počátkem roku do peněžního ústavu na 3 % p. a. Jak velkou částku *K* mohl vybrat počátkem každého roku, jestliže mu mělo dědictví stačit na dobu šesti let? [Užijte tabulek zásobitelů.]

Poznámka: První částku si chtěl vybrat ihned, aby měl na výdaje prvního roku.

- 153.** Jak velkými deseti stejnými ročními splátkami, splatnými vždy koncem roku, lze umořit dluh 400 000 Kčs při 4 % p. a.? Oč by se tyto splátky snížily, kdyby úroková míra byla 3 % p. a. [Užijte tabulek umořovatelů.]

- 154.** Družstevní podnik splácí půjčku 50 000 Kčs ročními splátkami 7 500 Kčs vždy koncem roku. Kolika splátkami půjčku vyrovná a jak velká bude poslední splátka? (4 % p. a.)

[Návod: Ze vztahu $50\,000 = 7\,500 \cdot v + 7\,500 \cdot v^2 + \dots + 7\,500 \cdot v^n$ plyne, že $a_n = 6,6$. Z tabulek zásobitelů se určí, že splátek po 7 500 Kčs bude sedm a osmá bude menší.]