

69. Dokažte, že platí vztah $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$, jsou-li n, k přirozená čísla, $n \geq k, n \neq 1$.

70. Dokažte, že platí:

$$\frac{1}{2} \binom{n}{2} \left[\binom{n}{2} - 1 \right] - n \cdot \binom{n-1}{2} = 3 \binom{n}{4}, \text{ kde } n \text{ je přirozené číslo větší než } 3.$$

71. Určete všechna přirozená čísla x , která vyhovují rovnici

$$\text{a) } \binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} = 4;$$

$$\text{b) } \binom{x-1}{x-2} + \binom{x-2}{x-4} = 4.$$

72. Jsou-li m, n přirozená čísla, přičemž $m \geq 3, n \geq 3$, dokažte, že platí vztah

$$\binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3} = n \cdot \binom{m}{2} + m \cdot \binom{n}{2}.$$

[Návod: Obě strany rovnice lze upravit na tvar $\frac{m \cdot n}{2} (m + n - 2)$.]

73. Pro která přirozená čísla n, m platí nerovnost

$$\text{a) } \binom{n}{2} + \binom{n+3}{2} + \binom{n+6}{2} < 72; n > 1;$$

$$\text{b) } \binom{m+n}{2} \geq \binom{m}{2} + \binom{n}{2} + 4; m > 1, n > 1?$$

74. Určete všechna přirozená čísla n tak, aby platilo:

$$\binom{n}{3} + \binom{n+2}{3} + \binom{n+4}{3} = \frac{n^3}{2} + 88.$$

75. Určete všechna přirozená čísla x a y , která vyhovují vztahu

$$\binom{x+1}{y+1} : \binom{x+1}{y} : \binom{x+1}{y-1} = 5 : 5 : 3.$$

[Návod: Využijte vzorce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.]

76. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla m platí vztah

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \dots + \binom{m+p}{m} = \binom{m+p+1}{m+1},$$

kde p je nezáporné celé číslo.

[Návod: $\binom{m+1}{m} + \binom{m+1}{m+1} = \binom{m+2}{m+1}$; $\binom{m+2}{m} + \binom{m+2}{m+1} = \binom{m+3}{m+1}$ atd. až $\binom{m+p}{m} + \binom{m+p}{m+1} = \binom{m+p+1}{m+1}$; tyto rovnice sečtěte.]

77. Vyjádřete jediným kombinačním číslem součet

a) $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3}$;

b) $\binom{10}{10} + \binom{11}{10} + \binom{12}{10} + \binom{13}{10}$.

[Návod: Využijte vztahu z úlohy 76.]

78. Dokažte matematickou indukcí vztah

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}; \quad n \text{ je přirozené číslo větší než } 1.$$

79. Dokažte, že platí vztah

$$\binom{r+s}{2} = \binom{r}{2} + \binom{r}{1} \cdot \binom{s}{1} + \binom{s}{2}, \quad \text{kde } r, s \text{ jsou přirozená čísla větší než } 1.$$

Řešení

$$\begin{aligned} \text{A. } \binom{r+s}{2} &= \frac{(r+s)(r+s-1)}{2} = \frac{(r+s)^2 - r - s}{2} = \\ &= \frac{r^2 + 2rs + s^2 - r - s}{2} = \frac{r(r-1) + s(s-1) + 2rs}{2} = \frac{r(r-1)}{2} + \\ &+ \frac{s(s-1)}{2} + rs = \binom{r}{2} + \binom{s}{2} + rs = \binom{r}{2} + \binom{r}{1} \binom{s}{1} + \binom{s}{2}. \end{aligned}$$

B. Necht' $P_1, P_2, P_3, \dots, P_r$ jsou předměty určitého druhu, jejichž počet udává číslo r a $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_s$ předměty jiného druhu, jejichž počet udává číslo s .

Máme-li všechny tyto předměty zkombinovat po dvou, můžeme postupovat také tak, že zkombinujeme po dvou předměty prvního druhu, potom spojíme každý předmět prvního druhu s každým předmětem druhého druhu a nakonec zkombinujeme po dvou všechny předměty druhého druhu. Dvojic vytvořených z předmětů prvního druhu je $\binom{r}{2}$, dvojic z předmětů různých druhů je rs a dvojic vytvořených z předmětů druhého druhu je $\binom{s}{2}$.

Závěr: Vztah $\binom{r+s}{2} = \binom{r}{2} + \binom{r}{1} \cdot \binom{s}{1} + \binom{s}{2}$ pro $r > 1$, $s > 1$ platí.

[Poznámka: Vztah platí i pro čísla $r = 1$, $s = 1$; nutno však předpokládat, že kombinační číslo $\binom{n}{k}$ pro $k > n$ je rovno nule.]

80. Dokažte, že platí vztah

$\binom{r+s}{3} = \binom{r}{3} + \binom{r}{2} \binom{s}{1} + \binom{r}{1} \binom{s}{2} + \binom{s}{3}$, kde r, s jsou přirozená čísla větší než 2.

Řešení

$$\begin{aligned} \binom{r+s}{3} &= \binom{r+s}{2} \cdot \frac{r+s-2}{3} = \left[\binom{r}{2} + rs + \binom{s}{2} \right] \cdot \frac{r+s-2}{3} = \\ &= \binom{r}{2} \cdot \frac{r+s-2}{3} + \frac{rs(r-1+s-1)}{3} + \binom{s}{2} \frac{r+s-2}{3} = \\ &= \binom{r}{2} \frac{r-2}{3} + \binom{r}{2} \cdot \frac{s}{3} + \frac{rs(r-1)}{3} + \frac{rs(s-1)}{3} + \binom{s}{2} \frac{s-2}{3} + \\ &+ \binom{s}{2} \cdot \frac{r}{3} = \frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} + \binom{r}{2} \cdot \frac{s}{3} + \frac{r(r-1)}{2} \cdot \frac{2s}{3} + \\ &+ \frac{s(s-1)}{2} \cdot \frac{2r}{3} + \frac{s(s-1)(s-2)}{2 \cdot 3} + \binom{s}{2} \cdot \frac{r}{3} = \binom{r}{3} + \binom{r}{2} \cdot \frac{s}{3} + \\ &+ \binom{r}{2} \cdot \frac{2s}{3} + \binom{s}{2} \cdot \frac{2r}{3} + \binom{s}{2} \cdot \frac{r}{3} + \binom{s}{3} = \binom{r}{3} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \binom{r}{2} \left(\frac{s}{3} + \frac{2s}{3} \right) + \binom{s}{2} \left(\frac{2r}{3} + \frac{r}{3} \right) + \binom{s}{3} = \binom{r}{3} + \binom{r}{2} \cdot s + \\
 &+ \binom{s}{2} \cdot r + \binom{s}{3} = \binom{r}{3} + \binom{r}{2} \binom{s}{1} + \binom{r}{1} \binom{s}{2} + \binom{s}{3}.
 \end{aligned}$$

Poznámka: Při dokazování tohoto vztahu je možno využít též postupu uvedeného v řešení B úlohy 79.

Závěr: Vztah $\binom{r+s}{3} = \binom{r}{3} + \binom{r}{2} \binom{s}{1} + \binom{r}{1} \binom{s}{2} + \binom{s}{3}$ platí pro všechna přirozená čísla r a s (viz poznámka úlohy 79.)

81. Jsou-li r, s, k přirozená čísla $r \geq k, s \geq k$ a platí-li vztah

$$\begin{aligned}
 \binom{r+s}{k} &= \binom{r}{k} + \binom{r}{k-1} \binom{s}{1} + \binom{r}{k-2} \binom{s}{2} + \dots + \\
 &+ \binom{r}{1} \binom{s}{k-1} + \binom{s}{k},
 \end{aligned}$$

dokažte, že platí též:

$$\binom{2k}{k} = \binom{k}{0}^2 + \binom{k}{1}^2 + \binom{k}{2}^2 + \dots + \binom{k}{k}^2.$$

[Návod: Učinite $r = s = k$.]

82. Je-li dáno v rovině n bodů $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, z nichž žádné tři neleží v přímce, pak je jimi určeno $\binom{n}{2}$ přímek. Dokažte, že tyto přímky mohou mít kromě uvedených bodů nejvýše $3 \binom{n}{4}$ dalších průsečíků za předpokladu, že $n \geq 4$.

Řešení

$\binom{n}{2}$ přímek v rovině může mít nejvýše $\binom{\binom{n}{2}}{2}$ průsečíků.

Tento počet je však nutno v našem případě snížit, neboť každým daným bodem jde $(n-1)$ přímek. Je tedy celkový a nejvyšší počet všech průsečíků dán číslem $\binom{\binom{n}{2}}{2} - n \binom{n-1}{2} + n$.

Podle textu úlohy nás však zajímá nejvyšší počet průsečíků uvažovaných přímek kromě daných bodů. Tento počet udává číslo

$$\begin{aligned} & \left(\binom{n}{2} \right) - n \binom{n-1}{2} + n - n = \left(\binom{n}{2} \right) - n \binom{n-1}{2} = \\ &= \frac{\frac{n(n-1)}{2} \left[\frac{n(n-1)}{2} - 1 \right]}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} = \\ &= \frac{n(n-1)(n^2 - n - 2)}{8} - \frac{4n(n-1)(n-2)}{8} = \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)(n-2) - 4n(n-1)(n-2)}{8} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n+1-4)}{8} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} = \\ &= \frac{1}{8} \binom{n}{4} \cdot 24 = 3 \binom{n}{4}. \end{aligned}$$

Závěr: Přímky spojující n bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v téže přímce, mohou mít kromě těchto bodů nejvýše $3 \binom{n}{4}$ dalších průsečíků; $n \geq 4$.

- 83.** Určete všechny navzájem různé součiny, z nichž každý se skládá ze tří činitelů vybraných z čísel 2, 3, 5, 7, přičemž činitelé téhož součinu se mohou i opakovat. Přesvědčte se, že počet takto vzniklých součinů vyhovuje vzorci $P = \binom{n+k-1}{k}$, kde $n = 4$ a $k = 3$.

***84.** Kolik různých početních spojů obsahuje malá násobilka? [Návod: Spoje jsou 1. 1; 1. 2; 1. 3; ..., 1. 9; 1. 10; 2. 2; 2. 3; 2. 4; ..., 2. 9; 2. 10; 3. 3; 3. 4; ..., 3. 9; 3. 10 atd.]

***85.** Z kolika prvků lze vytvořit o 49 více kombinací třetí třídy s opakováním než bez opakování?

***86.** Kolik řešení má v oboru nezáporných čísel celých rovnice $x + y + z = 4$? (x, y, z jsou neznámé.)

***87.** Vypište všechny výrazy $M = Ax^t \cdot y^k \cdot z^s$, kde A je reálný parametr, x, y, z proměnné a t, k, s nezáporná čísla celá splňující rovnici $t + k + s = 5$. Kolik je takových navzájem různých výrazů M ?

3. BINOMICKÁ VĚTA

88. Proveďte:

- a) $(x \pm 1)^6$; b) $(a^2 - 1)^6$; c) $(x^2 \pm 2y^3)^4$;
 d) $(1 + \sqrt{a})^7$, $a \geq 0$; e) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^4$; f) $(\sqrt{3} - i\sqrt{3})^6$;
 g) $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{b}{a}\right)^7$; $a \neq 0$, $b \neq 0$.

89. Proveďte: a) $(2x + 3y)^5 + (2x - 3y)^5$;

b) $(a + ib)^4 - (a - ib)^4$;

c) $(1 + i)^8 - (2i)^4$.

90. Ukažte, že platí:

a) $(a + b)^6 - 6ab(a + b)^4 + 9a^2b^2(a + b)^3 - 2a^3b^3 =$
 $= (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$;

b) $(a + b)^7 - (a^7 + b^7) = 7ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)^2$.

[Návod: $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.]

91. V oboru reálných čísel rozložte v součin výraz $(x + y)^5 - x^5 - y^5$.

92. Jak velký je pátý člen geometrické posloupnosti, jejíž první člen $a_1 = (xy)^{-2}$ a kvocient $q = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$? ($x > 0$, $y > 0$.)

93. Dokažte, že výraz $(1 - x)^5 + x^5 - 1$ je dělitelný deseti pro všechna celá čísla x .

94. Určete v^6 , je-li $v = \frac{i\sqrt{3} - 1}{2}$. Lze výraz v považovat za kořen rovnice $x^6 - 1 = 0$? Vyhovuje této rovnici též kořen $u = \frac{i\sqrt{3} + 1}{2}$?

*95. Dokažte, že číslo $x = \left[\frac{(1 + \sqrt{2})^n + (-1 + \sqrt{2})^n}{2} \right]^2$ je přirozené pro každé přirozené číslo n .

[Návod: Užijte binomické věty a zkoumejte číslo x , je-li a) n číslo sudé, b) n číslo liché.]

96. Vypočítejte na 5 desetinných míst hodnoty mocnin $1,02^5$; $1,03^4$; $0,99^4$

a) pomocí logaritmů, b) na základě vypočtů

$\left(1 + \frac{2}{100}\right)^5$, $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^4$, $\left(1 - \frac{1}{100}\right)^6$ pomocí binomické věty.

Výsledky srovnejte.

97. Na jakou částku vzroste 1 000 Kčs při 2% celoročním složeném úroko-

vání za 5 let? K výpočtu užíjte binomické věty. Jaké chyby se dopustíte, užijete-li k výpočtu přibližného vzorce $(1+x)^n \doteq 1+nx^2$?

98. a) Dokažte dvojím způsobem (rozkladem v součin i užitím binomické věty), že výraz $V = (b+1)^n - 1$ je dělitelný číslem b , jsou-li čísla b , n přirozená a číslo $b \geq 2$.

b) Sestavte výraz V , který je dělitelný a) třemi, b) čtyřmi, c) deseti.

99. a) Je-li číslo $n \geq 2$ přirozené, potom výraz $V = (n+1)^n - 1$ je dělitelný číslem n^2 . Dokažte to.

b) Sestavte výraz V , který je dělitelný číslem a) 25, b) 36, c) 64.

100. Dokažte, že výraz $p = \frac{6^{2n} - 1}{35}$ je číslo celé pro každé přirozené číslo n .

Řešení

Upravujeme výraz $q = 6^{2n} - 1$ takto:

$$\begin{aligned} q &= 6^{2n} - 1 = (6^2)^n - 1 = 36^n - 1 = (35 + 1)^n - 1 = \binom{n}{0} 35^n + \\ &+ \binom{n}{1} 35^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} 35 + \binom{n}{n} - 1 = \binom{n}{0} 35^n + \\ &+ \binom{n}{1} 35^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} 35. \end{aligned}$$

Závěr: Výraz q je dělitelný číslem 35, v důsledku čehož je výraz p číslo celé.

101. Dokažte, že výraz $Z = \frac{(\sqrt[10]{14^{13}} - 1)(\sqrt[10]{14^{13}} + 1)}{169}$ je číslo celé.

102. Dokažte, že výraz $V = 40^n - 8^n - 5^n + 1$ je dělitelný číslem 28 pro každé přirozené číslo n .

[Návod: $40^n = (5 \cdot 8)^n$; potom výraz V rozložte v součin.]

103. Dokažte, že číslo $11^{100} - 1$ končí čtyřčíslem 6 000.

104. Určete čtvrtý člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^5$ pomocí binomické věty ($a > 0$, $b > 0$).

105. Určete třetí člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(a^5 - 2b^4)^4$ pomocí binomické věty.

106. Pro které číslo x je pátý člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^{10}$ pomocí binomické věty roven číslu 105?

107. Který člen mnohočlenu vzniklého po výpočtu $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ pomocí binomické věty obsahuje x^8 ?

- 108.** Vypočítáme-li podle binomické věty $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^n$, $x \neq 0$, dostaneme mnohočlen, jehož druhý člen má koeficient o 54 menší než člen třetí. Určete ten člen mnohočlenu, který neobsahuje x .

Řešení

Zřejmě platí vztah $\binom{n}{1} + 54 = \binom{n}{2}$, který vede po upravení k rovnici $n^2 - 3n - 108 = 0$, jejíž kořeny jsou $n_1 = 12$, $n_2 = -9$, z nichž však jen kořen $n_1 = 12$ vyhovuje úloze.

Zbývá vyšetřit, zda v mnohočlenu, který vznikne výpočtem $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$ existuje absolutní člen. Dejme tomu, že tento člen existuje a je v mnohočlenu členem k -tým; označme ho A_k .

$$\text{Potom platí: } A_k = \binom{12}{k-1} \cdot (x^3)^{13-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} = \binom{12}{k-1} x^{39-3k} x^{1-k} = \\ = \binom{12}{k-1} x^{40-4k}.$$

Aby člen A_k neobsahoval x , je nutno, aby $40 - 4k = 0$, odkud $k = 10$.

Závěr: Desátý člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$, $x \neq 0$, neobsahuje x .

- 109.** Vypočtete-li podle binomické věty $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^6$, $x \neq 0$, který člen výpočtu neobsahuje x ?
- 110.** Mnohočlen, který dostaneme, vypočítáme-li podle binomické věty $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$, $x \neq 0$, má koeficient druhého členu o 44 menší než členu třetího. Určete ten člen mnohočlenu, který neobsahuje x .
- 111.** Kolik racionálních členů má mnohočlen, který vznikne po výpočtu $(\sqrt{5} + \sqrt[3]{2})^{12}$ pomocí binomické věty? Vypište je.
- 112.** Určete ten člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(1 + \sqrt[3]{3})^8$ pomocí binomické věty a který má tu vlastnost, že je větší než člen předcházející a větší než člen následující.

Řešení

Nechť tuto vlastnost má člen A_k , který je k -tým členem uvažovaného mnohočlenu. Podle dané podmínky je $A_{k-1} < A_k$, $A_k > A_{k+1}$, kde

$$A_k = \binom{8}{k-1} (\sqrt[3]{3})^{k-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \binom{8}{k-1} \cdot (\sqrt[3]{3})^k, A_{k-1} = \\ = \binom{8}{k-2} (\sqrt[3]{3})^{k-2} = \frac{1}{3} \binom{8}{k-2} (\sqrt[3]{3})^k, A_{k+1} = \binom{8}{k} (\sqrt[3]{3})^k.$$

a) Jelikož je $A_k > A_{k-1}$, platí nerovnost $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \binom{8}{k-1} (\sqrt[3]{3})^k > \frac{1}{3} \binom{8}{k-2} (\sqrt[3]{3})^k$, odkud po využití vztahu $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$ plyne nerovnost $k < 6,706$.

b) Jelikož je $A_k > A_{k+1}$, platí nerovnost

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \binom{8}{k-1} (\sqrt[3]{3})^k > \binom{8}{k} (\sqrt[3]{3})^k, \text{ ze které plyne nerovnost } k > 5,706.$$

Závěr: Šestý člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(1 + \sqrt[3]{3})^9$ pomocí binomické věty, je větší než oba členy sousední.

113. Který člen mnohočlenu vzniklého po výpočtu $(1 + \sqrt[3]{3})^{100}$ pomocí binomické věty je větší než člen předcházející i člen následující?

114. Určete největší koeficient mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(5a + 3b)^{10}$ podle binomické věty.

115. Určete ten člen mnohočlenu vzniklého po výpočtu $(1 + x^3)^9 \cdot (1 + x^2)^{10}$ pomocí binomické věty, který obsahuje x^{14} .

[Návod: Je-li A_k k -tý člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(1 + x^3)^9$ a A'_r r -tý člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(1 + x^2)^{10}$, pak hledaný člen uvažovaného mnohočlenu má tvar $A_k \cdot A'_r$.]

116. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí:

$$\text{a) } \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n;$$

$$\text{b) } \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

[Návod: $2^n = (1 + 1)^n$, $0 = (1 - 1)^n$.]

117. Dokažte, že součet všech kombinací bez opakování prvé až n -té třídy z n prvků je roven číslu $(2^n - 1)$.

118. Dokažte, že pro všechna přirozená sudá čísla n platí:

$$\text{a) } \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n} = 2^{n-1};$$

$$b) \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n-1} = 2^{n-1}.$$

[Návod: Užijte $(1 + 1)^n \pm (1 - 1)^n$.]

119. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + \dots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1},$$

$$\text{víte-li, že } k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

[Návod: Dosazujte postupně za k čísla $1, 2, 3, \dots, n$ a vzniklé rovnice sečtěte.]

120. Vyjádřete a) $\cos 4\alpha$; $\sin 4\alpha$; b) $\cos 5\alpha$; $\sin 5\alpha$; c) $\cos 7\alpha$; $\sin 7\alpha$ pomocí funkcí s argumentem α .

4. OPAKOVÁNÍ

121. Vypište kombinace a variace všech tříd z prvků u, v, p, q a přesvědčte se, že počet všech variací je o 49 větší než počet všech kombinací. Které cyklické permutace můžete z těchto prvků vytvořit?

122. Kolik různých vlajek je možno vytvořit z látek barvy bílé, modré, červené, žluté a zelené, skládá-li se každá vlajka ze tří různých barev? Které z nich mají červenou barvu uprostřed? Uveďte jejich počet.

123. Vrcholy obdélníka $ABCD$ a střed E strany BC tvoří skupinu pěti bodů. Kolik trojúhelníků má všechny tři své vrcholy v těchto bodech? Zakreslete je a rozdělte do skupin, z nichž každá obsahuje trojúhelníky shodné.

124. Je dáno n prvků $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Určete počet všech permutací vytvořených z těchto prvků, v nichž prvky a_1, a_2 nestojí vedle sebe.

125. 36 žáků bylo na brigádě namátkou rozděleno do devíti místností po čtyřech žácích. Kolika způsoby mohou být určitému žákovi přiděleni jeho spolubydlíci?

126. Na základě vztahu $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ ukažte, že výraz

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{3} + \binom{n+3}{4} - \binom{n+4}{4} = 0.$$