

3. NEKONEČNÉ GEOMETRICKÉ ŘADY

155. Odůvodněte konvergenci nekonečné geometrické řady a potom určete její součet:

$$(\sqrt{5} - 2) + (\sqrt{5} - 2)^2 + (\sqrt{5} - 2)^3 + \dots$$

156. Je dána nekonečná geometrická řada

$$1 + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \dots; \text{odůvodněte její kon-}$$

vergenci a určete její součet.

157. Určete dvojím způsobem součet nekonečné geometrické řady

$$1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \frac{81}{256} - \frac{243}{1024} + \dots$$

a) přímo,

b) po předcházejícím uspořádání na rozdíl dvou nekonečných geometrických řad s kladnými členy. Konvergenci řady odůvodněte.

158. Určete součet řady

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots$$

159. Zjistěte, pro která čísla x lze určit součet řady $p - qx + px^2 - qx^3 + \dots + px^4 - qx^5 + \dots$ a potom tento součet určete.

- 160.** Zjistěte, pro která čísla x lze určit součet řady:
 $\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^6 x + \cos^6 x + \dots$ a potom tento součet určete.

Řešení

Uspořádejme nejprve členy naší řady takto:

$$(\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \dots) + (\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots).$$

Je-li $\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \dots = S$ a $\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots = S'$,

má naše řada součet $S + S' = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$, ovšem za předpokladu, že $0 < \sin^2 x < 1$ a $0 < \cos^2 x < 1$, tedy pro $x \neq k \frac{\pi}{2}$, kde k je číslo celé.

Závěr: Danou řadu lze sečíst pro všechna čísla $x \neq k \frac{\pi}{2}$, kde k je číslo celé; pro uvedené hodnoty čísla x má řada součet $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

161. Zjistěte, pro která čísla x lze určit součet řady:

a) $1 + (2 - x) + (2 - x)^2 + (2 - x)^3 + \dots$

b) $1 + (4 + x) + (4 + x)^2 + (4 + x)^3 + \dots$

a potom ho určete.

162. Rozhodněte, které z daných řad jsou konvergentní a které divergentní (konvergentní řady sečtěte):

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{2n-1}$.

163. Přeměňte na zlomky obyčejné:

a) $2,\overline{4}$;

b) $0,\overline{23}$;

c) $2,\overline{403}$;

d) $3,\overline{789}$;

e) $1,\overline{5042}$;

f) $0,\overline{4305}$;

g) $0,\overline{24}$;

h) $0,\overline{583}$;

i) $2,\overline{634}$;

j) $3,\overline{4872}$;

k) $0,\overline{02347}$;

l) $1,\overline{37489}$.

164. a) Určete součet $0,\overline{27} + 0,\overline{463}$. Užijte nekonečných geometrických řad.

b) Dokažte, že je správný zápis: $\frac{0,\overline{46}}{0,\overline{63}} = \frac{11}{15}$. Použijte nekonečných geometrických řad.

165. Která nekonečná konvergentní geometrická řada má první člen $a_1 = 1$ a součet S rovný součtu řady $6 - \frac{6}{5} + \frac{6}{25} - \frac{6}{125} + \dots$?

166. Stanovte hodnotu součinu $y = 3 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[6]{3} \dots$

167. Menší kořen rovnice $2x^2 - 5x + 2 = 0$ je roven prvnímu členu nekonečné konvergentní geometrické řady, větší kořen jejímu součtu. Určete kvocient řady.

***168.** Je dána rovnice $x^2 - 2x + a = 0$; její diskriminant určuje kvocient nekonečné konvergentní geometrické řady, její absolutní člen součet této řady. Napište tuto řadu a stanovte vymezení pro čísla a .

169. Vypočítejte hodnotu výrazu: $\frac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n}{n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \dots}$

- 170.** Zlomek $\frac{1}{1-2x}$ je možno považovat za součet geometrické řady. Napište tuto řadu a uveďte podmínku pro číslo x .

Řešení

Srovnáme-li zlomek $\frac{1}{1-2x}$ se vzorcem $S = \frac{a_1}{1-q}$ udávajícím hodnotu součtu nekonečné konvergentní geometrické řady, je zřejmé, že $a_1 = 1$, $q = 2x$, přičemž je nutné, aby $|x| < \frac{1}{2}$.

Rozvineme-li tedy náš zlomek v nekonečnou konvergentní geometrickou řadu, dostaneme $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$.

Závěr: $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$ za předpokladu, že $|x| < \frac{1}{2}$.

- 171.** Nahraďte zlomek $\frac{m}{m-x}$ nekonečnou konvergentní geometrickou řadou a stanovte vztah mezi čísly m a x .

- 172.** Rozviňte zlomek $\frac{1+a+a^2+a^3+\dots}{1-a+a^2-a^3+\dots}$ v nekonečnou konvergentní geometrickou řadu a stanovte vymezení pro číslo a .

- 173.** Rozviňte výraz $\frac{1}{\sin^3 \alpha}$ v nekonečnou konvergentní geometrickou řadu a stanovte vymezení pro úhel α .
[Návod: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.]

- 174.** Řešte rovnici:

a) $\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \log \sqrt[8]{x} + \dots = 2;$

b) $1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \dots = \frac{4x-3}{3x-4};$

c) $2^x + 4^x + 8^x + 16^x + \dots = 1.$

- 175.** Pro x z intervalu $\langle 0^\circ - 360^\circ \rangle$ řešte rovnici:

$$1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \dots = 2 \operatorname{tg} x.$$

- 176.** Která nekonečná konvergentní geometrická řada má tu vlastnost, že její první člen $a_1 = 1$ a libovolný její člen má hodnotu rovnou součtu všech členů následujících?

[Návod: Řada má tvar $1 + q + q^2 + \dots$,

$$a_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots]$$

177. Ukažte, že řešení soustavy $y = x$, $y = qx + a_1$, kde x, y jsou neznámé, tvoří dvě stejná čísla, která je možno pokládat za součet nekonečné konvergentní geometrické řady. Řešte také graficky v soustavě pravouhlých souřadnic, přičemž zvolte za q a a_1 určitá čísla tak, aby $0 < q < 1$ a $a_1 > 0$.

178. V nekonečné konvergentní geometrické řadě je součet prvních tří členů $1 + \frac{1}{18}$ a jejich součin $\frac{1}{27}$. Určete součet této řady.

179. Do čtverce $ABCD$ je vepsán čtverec $A_1B_1C_1D_1$ tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran čtverce $ABCD$; tomu je vepsán čtverec $A_2B_2C_2D_2$ tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran čtverce $A_1B_1C_1D_1$ atd. Postup se stále opakuje. Jak velký je součet: a) obvodů, b) obsahů všech čtverců, má-li strana čtverce $ABCD$ délku a ?

Řešení

a) Sledujeme-li obvody uvažovaných čtverců, dostaneme po řadě čísla:

$$0_1 = 4a, 0_2 = 2a\sqrt{2}, 0_3 = 2a, 0_4 = a\sqrt{2} \text{ atd.}$$

Tato čísla zřejmě tvoří geometrickou posloupnost, jejíž kvocient

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ a první člen } a_1 = 4a$$

Výraz $4a + 2a\sqrt{2} + 2a + a\sqrt{2} + \dots$ je nekonečnou konvergentní geometrickou řadou, jelikož $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, a má součet

$$\varphi = \frac{4a}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8a}{2 - \sqrt{2}} = \frac{8a(2 + \sqrt{2})}{2} = 4a(2 + \sqrt{2}).$$

b) Sledujeme-li obsahy uvažovaných čtverců, dostaneme po řadě čísla:

$$P_1 = a^2, P_2 = \frac{a^2}{2}, P_3 = \frac{a^2}{4}, P_4 = \frac{a^2}{8} \text{ atd.}$$

Výraz $a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \dots$ je nekonečnou konvergentní geometrickou řadou s kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Její součet je $\varphi' = 2a^2$.

Závěr: Součet obvodů všech čtverců dané vlastnosti je $4a(2 + \sqrt{2})$, součet obsahů těchto čtverců $2a^2$.

180. Do pravouhlého rovnoramenného trojúhelníka ABC je vepsán trojúhelník $A_1B_1C_1$ tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran trojúhelníka ABC ; jemu je opět vepsán trojúhelník $A_2B_2C_2$, jehož vrcholy leží ve

středech stran trojúhelníka $A_1B_1C_1$ atd. Postup se stále opakuje. Jak velký je součet obsahů všech trojúhelníků, mají-li odvěsny trojúhelníka ABC délku a ?

- 181.** Nad výškou rovnostranného trojúhelníka ABC je sestrojen rovnostranný trojúhelník $A_1B_1C_1$, nad jeho výškou je sestrojen rovnostranný trojúhelník $A_2B_2C_2$ atd. Postup se stále opakuje. Jak velký je součet obsahů všech trojúhelníků, má-li strana trojúhelníka ABC délku a ?
- *182.** Úhly os soustavy pravouhlých souřadnic jsou rozpuřeny přímkami p a q tak, že přímka p puří prvý a třetí kvadrant, přímka q kvadrant druhý a čtvrtý. Na ose x je zvolen bod A ve vzdálenosti d od počátku P ($PA > 0$). Z něho je spuřtěna kolmice na přímku p , z její paty P_1 kolmice na osu y , z její paty P_2 kolmice na přímku q atd. Jakou délku má tato vzniklá lomená spirála?
- *183.** V rovnostranném trojúhelníku ABC je spuřtěna z vrcholu C na stranu AB výška v_c ; z její paty P_1 kolmice na stranu AC , z její paty P_2 kolmice v_c ; z její paty P_3 kolmice na AC atd. Postup se opakuje nekonečně. Vypočítejte délku lomené čáry $CP_1P_2P_3P_4 \dots$, která tímto způsobem vznikne, má-li strana trojúhelníka ABC délku a .
- *184.** Do rovnostranného trojúhelníka o straně a je vepsán kruh, do něho rovnostranný trojúhelník, do toho opět kruh atd. Postup se stále opakuje. Jak velký je součet obsahů všech kruhů (obsah kruhu $P = \pi r^2$)?
- *185.** Určete kvocient posloupnosti RaA , jestliže čas sledujeme v 1min intervalech a poločas rozpadu RaA je 3,05 min (tj. za 3,05 min se rozpadne polovina látky).
- *186.** Otáčí-li se útvar uvedený v úloze 184 okolo výšky trojúhelníka, vzniknou rotační kužele a koule. Jak velký je součet objemů všech kuželů a součet objemů všech koulí (objem kužele $V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$, objem koule $V' = \frac{4}{3} \pi r^3$)?
- *187.** Při štěpení jaderného paliva uvolní každý neutron několik nových neutronů. Má-li vzniknout řetězová reakce, musí se z neutronů vzniklých při jednom štěpení využít nejméně jeden k dalšímu štěpení. Označíme-li průměrný počet neutronů z jednoho štěpení, využitých k dalšímu štěpení, značkou k , je $k \geq 1$.
 a) Kolik asi reakcí proběhlo v reaktoru při $k = 1,001$, zvětřil-li se počet neutronů tisíckrát?
 b) Za jakou dobu se dosáhlo tohoto zvětření, je-li střední doba od vzniku štěpného neutronu k dalšímu štěpení 0,003 s?
- *188.** Oteplování, popřípadě ochlazování tuhého tělesa v prostředí stálé teploty probíhá tak, že teplotní rozdíly mezi tělesem a okolím tvoří po stejných časových intervalech geometrickou posloupnost.

- a) Za jakou dobu se sníží teplotní rozdíl mezi povrchem tělesa a okolím na $\frac{1}{10}$ původní hodnoty, jestliže za každou sekundu se tento teplotní rozdíl sníží na 95 % předchozí hodnoty?
- b) Jak dlouho by (za stejných předpokladů) trvalo zmenšení teplotního rozdílu na $\frac{1}{100}$ původní hodnoty?
- c) Jak dlouho potrvá ochlazení na $\frac{1}{100}$ původního teplotního rozdílu, ochladí-li se za 1 s na 88 % původního teplotního rozdílu?
- *189. Do krychle o hraně a je vepsána koule, do koule krychle, do ní opět koule atd. Postup se stále opakuje. Jak velký je součet povrchů všech krychlí a součet povrchů všech koulí? [Návod: Povrch koule $S = 4\pi r^2$, tělesová úhlopříčka krychle se rovná průměru koule krychli opsané.]

4. OPAKOVÁNÍ

190. Je dána posloupnost $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5} \dots$; určete $a_n + a_{n+1}$.
191. Vyhovují-li členy posloupnosti rekurentnímu vzorci $a_{n+1} = a_n - 1$, dokažte, že vyhovují také vzorci $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} - a_{n-2}$.
192. Dokažte, že v posloupnosti $\{n^3\}$ je platný rekurentní vzorec $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$.
193. Dokažte matematickou indukcí vzorec $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, $q \neq 1$, víte-li, že $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
194. Dokažte matematickou indukcí správnost vzorce $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, víte-li, že $a_{n+1} = a_1 + nd$.
195. Dokažte matematickou indukcí, že výraz $6^{2n} - 1$ je dělitelný 7 pro každé přirozené číslo n .
[Návod: Výraz $6^{2(n+1)} - 1$ lze upravit na tvar $36(6^{2n} - 1) + 35$.]
196. Dokažte matematickou indukcí, že výraz $\frac{10^n - 1}{81} - \frac{n}{9}$ je číslo celé pro každé přirozené číslo n .
[Návod: $\frac{10^{n+1} - 1}{81} - \frac{n+1}{9}$ lze upravit na tvar $10 \left(\frac{10^n - 1}{81} - \frac{n}{9} \right) + n$.]

197. Dokažte matematickou indukcí, že součet prvních n členů posloupnosti $\{n^2\}$ má hodnotu $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
198. V aritmetické posloupnosti má n -tý člen hodnotu x a součet prvních n -členů hodnotu y . Určete první člen a diferenci.
199. Dvě aritmetické posloupnosti mají stejný první člen. n -tý člen první posloupnosti je 15, druhé posloupnosti 21. Součet prvních n členů první posloupnosti je 63, druhé posloupnosti 84. Vypište součty prvních n členů obou posloupností.
200. Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti je $S_n = 81$, součet prvních $(n+4)$ členů téže posloupnosti $S_{n+4} = 124$. Určete první člen posloupnosti a_1 a číslo n , je-li diference posloupnosti $d = \frac{1}{2}$.
201. Ve které aritmetické posloupnosti je součet prvních pěti členů s indexy lichými rovný číslu 85 a součet prvních pěti členů s indexy sudými rovný číslu 100?
202. Dělíme-li trojciferné číslo N jeho ciferným součtem, dostaneme podíl 26; píšeme-li číslice čísla N v opačném pořádku, dostaneme číslo M , které je o 396 větší než číslo N . Určete číslo N , tvoří-li jeho číslice tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.
203. Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou velké, je-li součet jejich kosinů $\frac{5}{4}$?
204. Určete velikost ostrého úhlu α , tvoří-li $\cotg \alpha$, $\frac{1}{\sin \alpha}$, $\tg \alpha$ tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.
205. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou velké, měří-li poloměr kružnice trojúhelníku opsané 12,5 cm?
206. Rychlost šíření zvuku ve vzduchu při 0°C je asi 331 m/s; s rostoucí teplotou roste také rychlost zvuku asi o 0,6 m/s na každý stupeň. Jaká je rychlost šíření zvuku při teplotě 25°C ? Při jaké teplotě je rychlost zvuku 340 m/s?
207. Dvě tělesa, která jsou 48 m od sebe vzdálená, dají se současně do pohybu po přímé dráze proti sobě. Jedno proběhne za první sekundu dráhu 4 m a v každé následující vždy o 2 m více než za sekundu předcházející. Druhé se pohybuje rovnoměrně rychlostí 10 m/s. Za jakou dobu nastane srážka?

- 208.** Dokažte, že v každé aritmetické posloupnosti platí vztah:

$$a_{k-1}^2 + 8a_k \cdot a_{k+1} = (2a_k + a_{k+1})^2.$$
[Návod: Využijte rovnice $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$.]
- 209.** Tvoří-li čísla a, b, c tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, dokažte, že platí mezi nimi vztah:

$$(a + b + c)^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2) + 6(a - b)^2 = 0.$$
[Návod: Krajní členy vyjádřete členem prostředním a diferencí.]
- 210.** Která geometrická posloupnost má tu vlastnost, že součet prvních deseti členů je 33krát větší než součet prvních pěti členů?
- 211.** Jak velký je součet prvních pěti členů geometrické posloupnosti, jejíž členy a_2, a_3, a_4 vzniknou, odečteme-li od čísel 33, 45, 63 totéž číslo?
- 212.** Napište prvních 8 členů geometrické posloupnosti, je-li
 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15, \quad a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 240.$
- 213.** Délku stran a, b, c trojúhelníka ABC tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem $q = \frac{3}{2}$. Vypočítejte velikost jeho nejmenšího úhlu.
- *214.** Je dán rovnostranný trojúhelník, jehož strana má délku a . Rozdělte každou jeho stranu na tři stejné díly a nad každým středním dílem sestrojte rovnostranný trojúhelník vně obrazce. Každou stranu takto vzniklého útvaru rozdělte opět na tři stejné díly a nad každým středním dílem sestrojte rovnostranný trojúhelník vně útvaru atd. Kolik stran a jak velký obvod má útvar, který vznikne, opakuje-li se postup n -krát?
- *215.** Výroba podniku roste ročně vždy o p procent. Za kolik let se zdvojnásobí?
Též pro $p = 10 \frac{1}{3} \%$.
- 216.** Inventář závodu má cenu 100 000 Kčs; z této ceny se odpisují ročně 2 % na opotřebování. Jaká bude cena inventáře po deseti letech, doplní-li se ročním nákladem 3 000 Kčs, vypláceným vždy koncem každého roku?
- 217.** V sudě je 100 l čistého lihu. Odebere se jeden litr a místo něho se nalije do sudu jeden litr vody. Pak se odebere jeden litr směsi a dolije se jedním litrem vody atd. Kolikaprocentní líc bude v sudě po dvacátém zředění? Kolikrát je nutno uvedené ředění opakovat, aby vznikl líc asi padesátiprocentní?
- 218.** Vývěva, jejíž recipient má objem 15 dm^3 , je opatřena válcem na vysávání vzduchu objemu $2,5 \text{ dm}^3$ (nepočítáme prostor zabraný pístem). Jaký

bude tlak pod recipientem po dvanáctém vytažení pístu, byl-li původní tlak 760 torr?

- *219. Vklad 5 000 Kčs se úrokoval 2 % celoročně složitě tři roky. Po třech letech byl přeložen i s úroky na vkladní knížku s dlouhodobou výpovědní lhůtou, přičemž úroková míra stoupla o 1 %. Na jakou částku vzrostl uvedený vklad za 8 let (celkem)?
- *220. JZD si vypůjčilo 100 000 Kčs a zavázalo se, že je splatí během deseti let, a to stejnými částkami, splatnými koncem každého roku. Určete velikost těchto splátek při 3% celoročním složitém úrokování. [Návod: Počítejte hodnoty jednotlivých splátek ke dni vypůjčení. Použijte tabulek pro SVVŠ, str. 85.]
221. V geometrické posloupnosti $\{3^{n-1}\}$ a aritmetické posloupnosti $\{2n - 1\}$ je člen a_n funkcí indexu n . Narýsujte grafy obou funkcí v soustavě pravouhlých souřadnic a ukažte na nich, že třetí člen první posloupnosti a pátý člen druhé posloupnosti mají stejnou hodnotu.
222. Čtyři čísla jsou po sobě jdoucími členy geometrické posloupnosti, jejich dekad. logaritmy čtyřmi po sobě jdoucími členy posloupnosti aritmetické s diferencí 1 a součtem 22. Která jsou to čísla?
223. Délky stran a, b, c trojúhelníka ABC tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, přičemž délka strany b je 10 cm. Zmenší-li se délka strany b o 2 cm, tvoří délky stran nového trojúhelníka $A'B'C'$ tři po sobě jdoucí členy posloupnosti geometrické. Určete délky stran trojúhelníka ABC .
224. Tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti mají součet 21. Zmenší-li se prostřední člen o 1 a zvětší-li se poslední člen o 6, vzniknou tři po sobě jdoucí členy posloupnosti geometrické. Určete členy obou posloupností.
225. Mezi čísla 3 a 18 vložte dvě čísla tak, aby první tři tvořila posloupnost geometrickou a poslední tři posloupnost aritmetickou. (V obou případech jde o tři po sobě jdoucí členy.)
226. Pět čísel, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , má tu vlastnost, že první tři tvoří posloupnost geometrickou a poslední čtyři posloupnost aritmetickou. Určete je, je-li $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 6$ a $a_2 \cdot a_5 = -18$.
227. Určete součet nekonečné geometrické řady:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^3 + \dots$$
228. Rozviňte výraz $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ v nekonečnou konvergentní geometrickou řadu a stanovte vymezení pro úhel α .

229. Mezi každé dva členy nekonečné konvergentní geometrické řady $1 + a + a^2 + a^3 + \dots$ je vložen další jeden člen tak, že spolu s původními členy vytvoří opět nekonečnou konvergentní geometrickou řadu. Stanovte součty obou řad a vymezení pro číslo a .

230. Řešte rovnici:

a) $1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3} + \dots = \frac{6}{x+5};$

b) $2^x \cdot \sqrt[2]{2^x} \cdot \sqrt[4]{2^x} \cdot \sqrt[8]{2^x} \dots = 0,25;$

c) $2 \cdot 3^{x+2} - 135 = 2(3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + \dots).$

231. Určete číslo, jemuž se blíží délka spirály, která vznikne takto: Nad průměrem $AB = 2r$ sestrojte půlkružnici, jejíž střed označte S ; nad průměrem BS sestrojte opět půlkružnici, která leží v opačné polovině a má střed S_1 , nad $S S_1$ opět půlkružnici atd. Postup se opakuje do nekonečna.

***232.** Rovnostrannému trojúhelníku, jehož strana má délku a , je vepsán kruh k , do zbývajících částí trojúhelníka opět kruhy, které se dotýkají dvou stran trojúhelníka a kruhu k atd. Postup se stále opakuje. Určete součet obsahů všech kruhů.