

IV. MOCNINY A ODMOCNINY

I. MOCNINY S CELOČÍSELNÝM EXPONENTEM

- Definujte mocninu a^n , je-li a libovolné reálné číslo a n číslo přirozené. Na základě této definice dokažte, že platí a) $a^{2n} \geq 0$, b) $a^{2n+1} \geq 0$, je-li $a \geq 0$, $a^{2n+1} < 0$, je-li $a < 0$.
- Porovnejte hodnoty: $(-1)^{2k}$; $(-1)^{2k-1}$; $(-1)^{2k+3}$; $(-1)^k$; $(-1)^{k+1}$; $(-1)^{2k+2}$, je-li k libovolné přirozené číslo.
- Uspořádejte sestupně podle velikosti čísla:
 2^2 , $(-2)^3$, $-(-2)^3$, $-(-2)^3$, $-(-2^4)$.
- Proveďte: a) $(-2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot (-4)^3$; b) $-(-3)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-4)$.
- Proveďte: a) $2a^3 - 3(-a)^5 + (-a)^3 + 2(-a)^5 - a^5$;
b) $(-b)^7 + 2(-b)^8 - 3(-b)^7 + (-b)^9 - b^8 - 2b^7 + b^9$;
c) $(-x)^3 \cdot (-x)^4 + x^9 : x^3 + 3(x^2)^3 - 5(-x)^6$; $x \neq 0$.
- Proveďte a určete podmínky, při kterých mají tyto výrazy smysl:
a) $\frac{(x+y)^3(x+y)^4}{(x+y)^5} : (x+y)^2$; b) $\frac{a^3 \cdot b^3 \cdot a^4 \cdot b^5}{ab^4 \cdot a^4 \cdot b^2} \cdot \frac{1}{a^3 \cdot b^2}$;
c) $\frac{3a^2b^3}{4c^5} \cdot \frac{2c^3b^2}{9a^4} \cdot \frac{6a^3c^3}{b^4}$; d) $\frac{x^2y^3z^4}{m^5} \cdot \frac{m^4z}{2x^3y^2} : \frac{z^4}{4m^2x}$;
e) $\frac{(-v)^3 \cdot (-v)^5}{v^2} \cdot \frac{v^5}{(-v)^2}$; f) $\frac{m^3(-m)^4}{m(-m)^5} : \frac{(-m)^6}{m^2(-m)^3}$.
7. a) $(x-y)^3 \cdot (y-x)^4$; b) $\frac{(r-s)^2 \cdot (s-r)^2}{r^2 \cdot s^3} \cdot \frac{r^6 \cdot s^3}{r-s}$.
- a) $\frac{a^6 \cdot (a^3)^2}{(a^3)^4}$; b) $\left(\frac{-2c}{d}\right)^2 \cdot \left(\frac{-2d}{c}\right)^3 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^4$;
c) $\left[16a^4 \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^4\right]^3$; d) $\left(\frac{a^2x^3}{a^3x^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^5$;
e) $\frac{[3(z^2)^3 \cdot y^2]^3}{(3zy)^4}$; f) $\frac{2^5(2b^3x^3)^2}{2 \cdot (2b \cdot x^2)^3}$;
g) $\frac{(2p^2q^3)^4 \cdot (3q^2r)^3 \cdot (25r^2p^3)^2}{(6p^3r)^3 \cdot (2 \cdot 5 \cdot p \cdot q^4)^4}$; h) $\frac{(2u^3v^2)^4}{12} : \frac{(2u^2v^5 \cdot 3u^4v^2)^2}{(3u^2v^4)^3}$.

$$9. \frac{a^3b}{3c^2} \cdot \frac{9bc^3}{7a^4} \cdot \frac{14c^3}{3ab} : \frac{2bc^3}{a^3}.$$

$$10. \left[\left(\frac{2a}{3b^3} \right)^3 \cdot \frac{9b^4}{4c^3} \cdot \left(\frac{5c^2}{3a} \right)^2 \right] : \frac{25c}{3a}.$$

$$11. \left[\frac{2a^2}{(5b)^2} \cdot \frac{15b}{4c} \cdot \frac{5bc}{3a} \right]^3 : \left[\left(\frac{5a}{4b} \right)^2 : \frac{5a}{8b^2} \right]^2.$$

12. Za předpokladu, že n je číslo přirozené, proveďte:

$$a) \frac{2^n \cdot 2^{n+1} \cdot 2^{n+2}}{2^2 \cdot 2^3}; \quad b) \frac{(-3)^{2n} \cdot (-3)^{2n+1} \cdot (-2)^{2n-1}}{-3};$$

$$c) (-a)^{2n+3} : a^{2n}; \quad a \neq 0; \quad d) \frac{a^n \cdot b^n \cdot a^n \cdot b^n}{ab}; \quad ab \neq 0;$$

$$e) (a - b - c)^{2n} \cdot (b + c - a)^{2n+1} \cdot (b + c - a).$$

13. Za předpokladu, že k je číslo přirozené, proveďte:

$$a) \left(\frac{a^2}{b^3} \right)^k \cdot \left(\frac{c^2}{d^3} \right)^k \cdot \left(\frac{b^2d^3}{ac^2} \right)^k; \quad b) \left[\frac{(x-5)^2}{x-2} \right]^k \cdot \left[\frac{x^2-4}{x-5} \right]^k;$$

$$c) \frac{\left(1 - \frac{a-b}{a} \right)^k}{\left(1 + \frac{a-b}{b} \right)^k}; \quad d) \frac{x^{2k} - 2x^k + 1}{x^3} : \frac{x^2}{(x^k - 1)^3}.$$

$$14. \frac{(a-b)^{x+y+1} \cdot (a+b)^{x+y+1}}{(a^2 - b^2)^{x+y}} \quad (x, y \text{ jsou čísla přirozená}).$$

15. Proveďte za předpokladu, že n je číslo přirozené:

$$a) \frac{a^{n+1} \cdot b}{a \cdot b^{n+1}} + \left(\frac{a}{b} \right)^n; \quad b) x^{n+2} \cdot \left(\frac{1}{y} \right)^{n+2} - \frac{x^2}{y^2} \left(\frac{x}{y} \right)^n.$$

$$*16. \frac{(x+y)^{2a+1}}{(u-v)^{2a-1}} \cdot \frac{(u-v)^{2a+1}}{(x^2-y^2)^{2a+1}} \cdot \frac{(x-y)^{2a+2}}{(u-v)^2} \quad (a \text{ je číslo přirozené}).$$

$$*17. \left[\frac{a^2 - b^2}{(x-y)^n} \right]^m \cdot \frac{[(x^2 - y^2)^m]^n}{(a+b)^m} \cdot \left[\frac{a-b}{(x+y)^n} \right]^m \quad (m, n \text{ jsou čísla přirozená}).$$

$$*18. \frac{a^{2x+3y} \cdot b^{4x-5y}}{a^{5x-y} \cdot b^{3x+y}} : \frac{a^{4x+5y} \cdot b^{2x-4y}}{a^{8x+2y} \cdot b^{x+2y}},$$

x, y jsou čísla přirozená, $x > 2y$.

19. Je-li k libovolné přirozené číslo, dokažte, že platí:

$$3 \cdot 2^{k+3} - 2 \cdot 2^{k+2} + 2^{k+4} = 2^{k+5}, \text{ přičemž } k \text{ je přirozené číslo.}$$

Řešení

Upravujeme postupně výraz $A = 3 \cdot 2^{k+3} - 2 \cdot 2^{k+2} + 2^{k+4}$ takto:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{k+3} - 2 \cdot 2^{k+2} + 2^{k+4} &= 3 \cdot 2^3 \cdot 2^k - 2 \cdot 2^2 \cdot 2^k + 2^4 \cdot 2^k = \\ &= 24 \cdot 2^k - 8 \cdot 2^k + 16 \cdot 2^k = 32 \cdot 2^k = 2^5 \cdot 2^k = 2^{k+5}. \end{aligned}$$

Závěr: Daný vztah platí.

20. Dokažte, že platí:

a) $5 \cdot 3^{x+2} - 3 \cdot 3^{x+1} = 36 \cdot 3^x$ (x je číslo přirozené);

b) $(x^{2n} - x^n y^n + y^{2n})(x^n + y^n) = x^{3n} + y^{3n}$ (n je číslo přirozené).

21. Rozložte v součin (exponenty všech mocnin jsou čísla přirozená):

a) $x \cdot a^{2n} + ya^{2m}$; b) $a^{x+1} + a$; c) $4^{x+1} - 4^x$; d) $4^x - 1$;

e) $a^{2m+1} - a$; f) $p^{n+2} - p^n q^2$; g) $x^{r+3} - x^r y^3$;

h) $x^{3n+3} \cdot y^3 - x^3 y^{3n+3}$; i) $y^n \cdot x^{n+4} - x^n y^{n+4}$;

j) $a^{3h} + a^{2h} - a^h - 1$. [Návod: $a^{3h} = a^{2h} \cdot a^h$.]

22. Definujte mocninu a^n , je-li $n = 0$ a mocninu a^{-n} , je-li n číslo přirozené. Z jakého důvodu nejsou tyto mocniny definovány pro číslo $a = 0$?

23. Počítejte z paměti:

a) 2^{-3} ; b) 3^{-4} ; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$; e) $(0,2)^{-3}$;

f) $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-4}$; g) $(2^{-3})^2$; h) $3^{-3} \cdot 3^2$; i) $\frac{2^{-3} \cdot 2^{-4}}{2^{-5}}$;

j) $\frac{4^0 \cdot 5^{-2}}{5^2 \cdot 3^0}$; k) $\frac{5^{-2} \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-4} \cdot 5^9}{2^{-5}}$.

24. Napište jako desetinná čísla:

a) 10^{-2} ; b) $3 \cdot 10^{-3}$; c) $17 \cdot 10^{-5}$; d) $6 \cdot 10^{-8}$;

e) $125 \cdot 10^{-3}$; f) $2,25 \cdot 10^{-4}$; g) $0,7 \cdot 10^{-1}$.

25. Napište desetinnými čísly velikost koeficientu roztažnosti:

a) $12 \cdot 10^{-6}$ (železa); b) $1,6 \cdot 10^{-6}$ (mědi); c) $3 \cdot 10^{-6}$ (zinku);

d) $8,1 \cdot 10^{-6}$ (skla).

26. Klidová hmotnost neutronu je $1,67 \cdot 10^{-24}$ g, hmotnost elektronu $9,1 \cdot 10^{-28}$ g. Určete poměr obou hmotností.

27. Elektron má hmotnost $9,1 \cdot 10^{-28}$. Vodíkové jádro má hmotnost asi 1 840krát větší. Určete ji.
28. Průměr atomového jádra je řádově 10^{-13} až 10^{-12} cm. Převedte na milimetry. Napište výsledek ve tvaru desetinného čísla.
29. Jakou hmotnost má mezon, je-li jeho hmotnost 80krát větší než hmotnost elektronu?

30. Proveďte a udejte, za jakých podmínek mají tyto výrazy smysl:

$$\begin{aligned} \text{a) } 3 \cdot \left(\frac{a}{v}\right)^{-2} \cdot \frac{a}{b}; \quad \text{b) } \left(\frac{c}{d}\right)^{-3} \cdot \frac{d}{c}; \quad \text{c) } \frac{1}{x} : \left(\frac{b}{x}\right)^{-1}; \\ \text{d) } \frac{a-b}{(a+b)^{-1}}; \quad \text{e) } \frac{(a-b)^{-2}}{a+b}; \quad \text{f) } \frac{1}{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-2}}; \\ \text{g) } \frac{1}{x^{-2}} + \frac{2}{x^{-1}} + 3 : x^0. \end{aligned}$$

31. Dokažte, že platí:

$$\begin{aligned} \text{a) } (3x^2)^{-3} : (2x^{-1})^3 &= \left(\frac{1}{6x}\right)^3, \text{ jestliže } x \neq 0; \\ \text{b) } (ax^2 + bx) \cdot x^{-2} &= \frac{ax+b}{x}, \text{ pro } x \neq 0; \\ \text{c) } (a-b^{-1})^2 &= \frac{a^2b^2 - 2ab + 1}{b^2}, \text{ je-li } b \neq 0. \end{aligned}$$

32. Proveďte a uveďte podmínky, za kterých mají tyto výrazy smysl:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}d}\right)^{-2}; \quad \text{b) } \left(\frac{3x^{-2}y^{-3}}{5z^{-4}}\right)^{-5}; \quad \text{c) } \left(\frac{x^0z^{-3}}{y^{-3}}\right)^{-4}; \\ \text{d) } \left(\frac{a^2b^{-4}}{c^{-3} \cdot d^{-2}}\right)^{-3} : \left(\frac{a^3b^{-3}}{c^{-2}d^{-2}}\right)^{-2}; \quad \text{e) } \left[\frac{1}{(x+y)^{-3}}\right]^{-2} \cdot (x+y)^{-3}. \end{aligned}$$

$$33. \left(\frac{a^{-3} \cdot b^{-7} \cdot c^0}{a^{-5} \cdot b^{-11} \cdot c^{13}}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{a^2 \cdot b^{-3} \cdot c^{-4}}{a^4 \cdot b^7 \cdot c^0}\right)^{-2}.$$

$$34. \left(a + \frac{1}{b}\right)^{-2} \cdot \left(b - \frac{1}{a}\right)^{-3} \cdot \left(ab - \frac{1}{ab}\right)^3.$$

$$35. [(-x)^{-2n} : (-x)^{-2n-1}]^{-2} \cdot [(-x)^{2n+1} \cdot (-x)^{-2n+1}]^{-3}; \quad n \text{ je číslo přirozené.}$$

$$36. (x^{-m-1})^{m-1} \cdot (x^m)^m \cdot x^{-1}; \quad m \text{ je číslo celé.}$$

$$*37. \left(\frac{a^x + a^{-x}}{b^y + b^{-y}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a^x - a^{-x}}{b^y - b^{-y}}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{2x} - 1}{b^{2y} - 1}\right)^{-2} : \left(\frac{a^{2x} + 1}{b^{2y} + 1}\right)^{-1}; \quad x, y \text{ jsou čísla celá.}$$

2. ODMOCNINY

38. Jak definujeme $\sqrt[n]{a}$, je-li $a \geq 0$ a n číslo přirozené? Bylo by možno definovat tuto odmocninu pro $a < 0$ a n liché? (Je platný vztah $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$ ^{$2k-1$} $= -\sqrt[n]{-a}$, kde $a < 0$ a k přirozené číslo?)
39. Jak velká je přepona pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délky $a = 261$ cm a $b = 380$ cm?
40. V kružnici o poloměru 78 mm je vedena tětiva délky 125 mm. Jakou vzdálenost má od středu kružnice?
41. Je dán čtverec, jehož strana má délku 5 cm, a obdélník o rozměrech 6 cm, 4 cm. Který z nich má delší úhlopříčku?
42. Kvádr má rozměry $a = 12,8$ cm, $b = 21,5$ cm, $c = 36,4$ cm. Jak dlouhé jsou jeho úhlopříčky stěnové a jakou délku má úhlopříčka tělesová?
[Návod: Tělesová úhlopříčka kváдру $u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.]
43. Určete výpočtem i z tabulek hodnoty: $\sqrt[3]{9\,604}$; $\sqrt[3]{153,76}$; $\sqrt[3]{1\,345\,600}$; $\sqrt[3]{2\,745,76}$; $\sqrt[3]{1\,794,369\,6}$; $\sqrt[3]{11}$.
44. Proveďte:
- $\sqrt{5} + 3\sqrt{3} - (2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{3})$;
 - $5(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - 4(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 3(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$;
 - $\frac{2}{3}\sqrt{6} + \frac{1}{6}\sqrt{5} - \frac{3}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{5}) - \frac{1}{12}(11\sqrt{5} - \sqrt{6})$;
 - $8\sqrt{a} + 5\sqrt{x} - 7\sqrt{a} + 4\sqrt{a} - 6\sqrt{x} - 3\sqrt{a} + \sqrt{x}$; $a \geq 0, x \geq 0$;
 - $4(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - 2(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - 6(3\sqrt{a} + \sqrt{b}) + 16\sqrt{a}$; $a \geq 0, b \geq 0$;
 - $a(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a}(a - b) - a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$, $a \geq 0, b \geq 0$;
 - $2\sqrt{a} - [3\sqrt[3]{a} - (5\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{a}) + \sqrt[3]{a}] - \sqrt{a} - 6(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a})$, $a \geq 0$.
45. Proveďte:
- $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$; b) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{30}$; c) $\sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{20}$; d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{2}$;
 - $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{3}$; f) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$; g) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{2b} \cdot \sqrt{ab}$, $a \geq 0, b \geq 0$; h) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{3b} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{ab}$, $a \geq 0, b \geq 0$;
 - $\sqrt[5]{4m^3 \cdot n} \cdot \sqrt[5]{2mn^2} \cdot \sqrt[5]{4m^2n^3}$.

46. Odmocněte částečně:

- a) $\sqrt[3]{12}$; $\sqrt[3]{50}$; $\sqrt[3]{72}$; $\sqrt[3]{240}$; $\sqrt[3]{315}$; b) $\sqrt[3]{48}$; $\sqrt[3]{250}$; $\sqrt[3]{128}$; c) $\sqrt[3]{9a^3b}$;
 $\sqrt[3]{4a^5b^3}$; $a \geq 0$, $b \geq 0$;
 d) $\sqrt[3]{27a^9b^{11}c^{21}}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$; $\sqrt[3]{8a^7b^8}$; $\sqrt[3]{ab^{10}}$.

47. Nejprve odmocněte částečně a potom proveďte:

- a) $5\sqrt[3]{63} - 2\sqrt[3]{175}$; b) $2\sqrt[3]{16} + 12\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250}$;
 c) $12\sqrt[3]{12} + 12\sqrt[3]{18} - 2\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{32}$; d) $3\sqrt[3]{12} - 6\sqrt[3]{3} + 6\sqrt[3]{24} - 13\sqrt[3]{3}$;
 e) $\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{75} - \sqrt[3]{48} + 2\sqrt[3]{108}$.

48. Rozhodněte, které z čísel je větší: a) $5\sqrt[3]{3}$ nebo $2\sqrt[3]{19}$;

b) $9\sqrt[3]{3}$ nebo $11\sqrt[3]{2}$?

49. Dokažte, že součin dvou odmocnin tvaru $u\sqrt[n]{m}$, $v\sqrt[n]{n}$, kde u, v jsou čísla racionální, $\sqrt[n]{m}$, $\sqrt[n]{n}$ čísla iracionální, která nelze částečně odmocnit, přičemž $m \neq n$, není nikdy racionální číslo.

[Návod: Ukažte, že $\sqrt[n]{mn}$ je číslo iracionální.]

50. Zjednodušte výraz $2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x^2} + \frac{5}{x}\sqrt{x^5}$ a udejte podmínky, za jakých má smysl.

[Poznámka: $\sqrt{x^2} = |x|$; jelikož $x > 0$, aby daný výraz měl smysl, je $|x| = x$.]

51. Zjednodušte výrazy: a) $x\sqrt{a} - y\sqrt{a^3} + z\sqrt{a^5}$; b) $\sqrt{a} + \sqrt{a^2} + \sqrt{a^3} + \sqrt{a^4} + \sqrt{a^5} + \sqrt{a^6} + \sqrt{a^7}$;

c) $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^5} + \sqrt[3]{a^6} + \sqrt[3]{a^7}$;

*d) $\sqrt[n-1]{a^n} - x\sqrt[n-1]{a} - (a-x)\sqrt[n-1]{x}$;

*e) $2xy\sqrt{x^{n+2}} - x^2y\sqrt{x^n} + 3y\sqrt{x^{n+4}} - x^3y\sqrt{x^{n-2}}$ a udejte podmínky, za kterých mají smysl.

52. Za předpokladu, že odmocniny v následujících výrazech jsou definovány, proveďte:

a) $(\sqrt{a^2b} + \sqrt{ab^2})\sqrt{ab}$; b) $(\sqrt{a^2b} + \sqrt{ab^2})(\sqrt{a^2b} - \sqrt{ab^2})$;

c) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})\sqrt{a^3b^3}$; d) $\sqrt{u}(\sqrt{u} + \sqrt{v}) + \sqrt{v}(\sqrt{u} - \sqrt{v})$;

e) $(\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2})(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})$;

f) $(\sqrt[3]{3m} + \sqrt[3]{2v})(\sqrt[3]{9m^2} - \sqrt[3]{6mv} + \sqrt[3]{4v^2})$.

53. Dokažte, že platí

$$\sqrt{(r-1)(r^2-1)} + \sqrt{9r^2+9r^3} + \sqrt{4+4r} = (4r+1)\sqrt{r+1}.$$

Jaké omezení tu platí pro číslo r ?

54. Upravte výraz $\sqrt[n]{a^{2n}b^{n+3}} + \sqrt[n]{b^3}$, je-li n číslo přirozené, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Jakou hodnotu má tento výraz pro $n = 3$, $b = 2$, $a = 1$?

55. Vyjádřete jako odmocninu výraz:

a) $3\sqrt[3]{2}; 2\sqrt[3]{3}; 5\sqrt[3]{5}; 4\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; b) $2\sqrt[3]{2}; 3\sqrt[3]{2}; 4\sqrt[3]{\frac{1}{128}}$;

c) $x^2y\sqrt[3]{y}; y \geq 0$;

d) $4(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}; y \geq 0, x > y$;

e) $n(x-1)\sqrt{\frac{x^2-1}{n^3(x-1)^3}}; n > 0, x > 1$.

56. Proveďte:

a) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; b) $\sqrt[3]{0,008}$; c) $\sqrt[3]{1\frac{7}{9}}$; d) $\sqrt[3]{180}:\sqrt[3]{5}$;

e) $\sqrt[3]{48}:\sqrt[3]{3}$; f) $\sqrt[3]{\frac{x^3y^6z^{12}}{64a^9}}$; g) $\sqrt[5]{a^4b^2}:\sqrt[5]{a^2b^2}$;

h) $\sqrt[3]{\frac{a^2b}{3c}}:\sqrt[3]{\frac{ab}{c}}$; i) $\frac{\sqrt[3]{3ab^3} \cdot \sqrt[3]{15ab}}{\sqrt[3]{5}}, a \geq 0, b \geq 0$;

j) $\sqrt[3]{\frac{5ab}{3c^2}}:\sqrt[3]{\frac{9cd^2}{25a^2b}}$.

57. Proveďte:

a) $(6 - 2\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[3]{6} - 7\sqrt[3]{15}) : \sqrt[3]{3}$;

b) $(\sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{5} - 5) : \sqrt[3]{5}$;

c) $(3 + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{6}) : (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$.

[Návod: Děleence upravte na tvar $\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(1 + \sqrt[3]{2})$.]

58. $(\sqrt[3]{a^4b} + \sqrt[3]{ab^4} - \sqrt[3]{a^2b^2}) : \sqrt[3]{ab}$.

59. $\frac{r}{s}\sqrt[n]{\frac{s^{n-1}}{r^{n-1}}} : \sqrt[n]{\left(\frac{r}{s}\right)^2}; r > 0, s > 0, n$ číslo přirozené.

60. Proveďte:

a) $(\sqrt[4]{7})^3$; $(\sqrt[4]{2})^5$; $(\sqrt[5]{4})^7$; $(\sqrt{2} + 1)^3$; $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$; $(1 + \sqrt{2})^3$;

b) $(\sqrt[3]{2x^2})^2$; $(\sqrt[4]{3x^3})^5$, $x \geq 0$; $(\sqrt[n]{n})^3$, $n \geq 0$;

c) $(\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{b})^3$, $a \geq 0$, $b \geq 0$; $(1 - \sqrt{a})^3$, $a \geq 0$.

61. a) $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2$; b) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2$; c) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$;

d) $(\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}})^2$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b$;

e) $(x + \sqrt{x^2 - \sqrt{x}})(x - \sqrt{x^2 - \sqrt{x}})$, $x \geq 1$.

62. Vyjádřete jedinou odmocninou:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{5\sqrt{5}}$; d) $\sqrt{s\sqrt{s}}$; $s \geq 0$;

e) $\sqrt[5]{s\sqrt{s}}$; f) $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$; g) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{x}{y}}}$; $y \neq 0$;

h) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^3b}}{ab}}$; $a > 0$, $b > 0$; i) $\sqrt{a^4 \cdot \sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}$; $a \geq 0$;

j) $\sqrt{\frac{1}{m^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{m} \cdot \sqrt{m}}}$; $m > 0$.

63. Proveďte:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$; b) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3}}{\sqrt[12]{3}}$; c) $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[5]{5^2} \cdot \sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[12]{5^{11}}}$; d) $\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2^3}}}$.

64. Zjednodušte a udejte podmínky, za jakých má tento výraz smysl:

a) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^5}}{x\sqrt[12]{x^5}}$; b) $\frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

c) $\left(\sqrt[12]{\frac{a^4x^2}{c}} : \sqrt[8]{\frac{a^3x^5}{c^6}}\right) : \sqrt[6]{\frac{c^5}{ax^3}}$;

d) $\sqrt[5]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2}} \cdot \sqrt{x\sqrt[4]{x^3}} : \sqrt[24]{x^{41}}$.

65. Upravte tak, aby jmenovatel zlomků neobsahoval iracionální číslo:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; b) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}$; c) $\frac{2}{\sqrt[4]{10}}$; d) $\frac{3}{\sqrt[5]{3}}$; e) $\frac{3}{\sqrt[3]{12^2}}$; f) $\frac{2a}{\sqrt[3]{a}}$; $a \neq 0$.

66. a) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}}$; b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-1}$; c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$; d) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$;

e) $\frac{6}{\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{12}}$; f) $\frac{3-\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}}$; g) $\frac{3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}}$; h) $\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

$a \geq 0, b > 0$ nebo $a > 0, b \geq 0$;

i) $\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$;

j) $\frac{\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[3]{a-b}}{\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}}$; $a \geq 0, b \geq 0, a > b$;

k) $\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$; $x \geq 2$.

67. Zjednodušte:

a) $1 + \frac{1+\sqrt[3]{3}}{2+\sqrt[3]{3}}$; b) $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$;

*c) $\frac{12}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}$; *d) $\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + \frac{3\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{3+\sqrt[3]{x}}{1-x}$;

*e) $\frac{\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-1}$;

[Návod: Jmenovatele zlomku rozložte na součin $(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{3}+1)$.]

*f) $\frac{1+\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}}$. [Návod: Násobte čitatele i jmenovatele zlomku výrazem $\sqrt[3]{6}-(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})$.]

68. Proveďte a rozhodněte, pro která čísla a má smysl výraz

$$x = \left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)+1-a}{(1-\sqrt{a})^4 a^3} \right]^{-2} : \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{9-a^2}}.$$

Řešení

a) Upravujeme postupně výraz x takto:

$$\begin{aligned}x &= \left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)+1-a}{(1-\sqrt{a})\sqrt[4]{a^3}} \right]^{-2} : \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{9-a^2}} = \\&= \left[\frac{a-\sqrt{a}+1-a}{(1-\sqrt{a})\sqrt[4]{a^3}} \right]^{-2} \cdot \frac{\sqrt{9-a^2}}{a \cdot \sqrt{a}} = \left[\frac{1-\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})\sqrt[4]{a^3}} \right]^{-2} \cdot \\&\cdot \frac{\sqrt{9-a^2}}{a\sqrt{a}} = \left[\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} \right]^{-2} \cdot \frac{\sqrt{9-a^2}}{a \cdot \sqrt{a}} = (\sqrt[4]{a^3})^2 \cdot \frac{\sqrt{9-a^2}}{a\sqrt{a}} = \\&= a\sqrt{a} \cdot \frac{\sqrt{9-a^2}}{a\sqrt{a}} = \sqrt{9-a^2};\end{aligned}$$

b) aby výraz x měl smysl, je především nutno, aby bylo číslo $a > 0$, neboť pro $a < 0$ by neměla $\sqrt{a}$ smysl a pro $a = 0$ by neměl smysl dělnec výrazu x .

Dále je nutno, aby číslo $a \neq 1$, neboť pro $a = 1$ má jmenovatel dělnce výrazu x hodnotu rovnou nule. Jelikož však $\sqrt{9-a^2}$ je ve jmenovateli dělitele výrazu x a musí být definována v oboru reálných čísel, je nutno, aby $(9-a^2) > 0$, což nastane pro $-3 < a < 3$.

Shrneme-li všechny podmínky, musí platit $0 < a < 3$, $a \neq 1$.

Závěr: Upravený výraz $x = \sqrt{9-a^2}$, přičemž je nutno, aby $0 < a < 3$, $a \neq 1$.

69. Proveďte a rozhodněte, pro která čísla x má smysl výraz

$$\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}} \right)^{-2} - \left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}} \right)^{-2}.$$

Řešení

a) Upravujeme daný výraz postupně takto:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}} \right)^{-2} - \left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}} \right)^{-2} = \\&= \left[\frac{1+2\sqrt{x}+x-1-x}{(1+\sqrt{x})\sqrt{1+x}} \right]^{-2} - \left[\frac{1-2\sqrt{x}+x-1-x}{(1-\sqrt{x})\sqrt{1+x}} \right]^{-2} = \\&= \left[\frac{2\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})\sqrt{1+x}} \right]^{-2} - \left[\frac{-2\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})\sqrt{1+x}} \right]^{-2} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{(1 + \sqrt{x})\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}} \right]^2 - \left[\frac{(1 - \sqrt{x})\sqrt{1+x}}{-2\sqrt{x}} \right]^2 = \\
&= \frac{(1 + \sqrt{x})^2(1+x)}{4x} - \frac{(1 - \sqrt{x})^2(1+x)}{4x} = \\
&= \frac{1+x}{4x} (1 + 2\sqrt{x} + x - 1 + 2\sqrt{x} - x) = \frac{1+x}{4x} \cdot 4\sqrt{x} = \frac{(1+x)\sqrt{x}}{x}.
\end{aligned}$$

b) Aby daný výraz měl smysl, musí pro číslo x platit tyto podmínky:

a) $x > 0$; b) $x \neq 1$; c) $x > -1$.

Závěr: Upravený výraz má tvar $\frac{(1+x)\sqrt{x}}{x}$, přičemž pro číslo x musí platit vztah $x > 0$, $x \neq 1$.

70. Upravte výraz:

a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} - 2x\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}} + 3x\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{x}}}$; $x > 0$;

b) $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 \cdot \sqrt[4]{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6a}}{3 \cdot \sqrt[3]{a^5}}}$; $a > 0$;

c) $\sqrt[6]{a^3b(7+4\sqrt{3})} \cdot \sqrt[3]{a(\sqrt{3ab} - 2\sqrt{ab})}$; $a \geq 0$, $b \geq 0$;

d) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^{-1}} : \sqrt[3]{y^2} \cdot \sqrt{x^3} + \sqrt[6]{y} : y$; $x > 0$, $y > 0$.

*71. a) $\left(\sqrt{x} + \frac{y - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) : \left(\frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy}} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \right)$;

$x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$;

b) $\left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$;

$a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.

72. Dokažte, že platí vztahy:

a) $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+r}{2}} + \sqrt{\frac{a-r}{2}}$;

b) $\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+r}{2}} - \sqrt{\frac{a-r}{2}}$,

kde $r = \sqrt{a^2 - b}$, jsou-li a , b přirozená čísla, přičemž $a^2 \geq b$.

73. Zjednodušte výrazy a) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$ podle vzorců úlohy 72.

74. Použijte výsledku úlohy 73a k úpravě výrazu $x = \frac{4}{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}$.

75. Dokažte, že platí vztah $a^2 + b^2 = c^2$, je-li

$$a = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1), \quad b = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad c = 2r.$$

76. Dokažte, že platí vztah

$$(\sqrt{n+p} + \sqrt{p})(\sqrt{n+p} - \sqrt{p}) = n; \quad n+p \geq 0, \quad p \geq 0.$$

Vztahu je možno užít k rozkladu racionálního čísla v součin, který má činitele iracionální. Zkuste např. pro $n = 3$, $p = 4$.

77. Dokažte, že výraz $v = (x+2) + \sqrt{(x-2)^2}$ má hodnotu $v = 2x$, je-li $x \geq 2$, a hodnotu $v = 4$, je-li $x < 2$.

78. Jsou-li čísla a , b nezáporná, dokažte, že platí vztah

$$\sqrt{a^2 + b^2} - 2\sqrt{\frac{ab}{2}} \geq 0.$$

79. Určete všechna kladná čísla x , která splňují nerovnost

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} \leq 1. \quad \text{Pro které číslo } x \text{ nastane rovnost?}$$

80. Určete všechna reálná čísla x , která splňují nerovnost

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x} \geq \sqrt{2}.$$

3. MOCNINY S RACIONÁLNÍM A IRACIONÁLNÍM EXPONENTEM

81. Jak definujeme mocninu $a^{\frac{m}{n}}$, je-li n číslo přirozené a m číslo celé? Platí tato definice pro všechna reálná čísla a ? Rozhodněte, kdy platí pro čísla $a \geq 0$, kdy pro čísla $a > 0$.

82. Zpaměti:

Podle definice nahraďte mocniny odmocninami a obráceně:

a) $25^{\frac{1}{2}}$; b) $8^{\frac{1}{3}}$; c) $5 \cdot 16^{\frac{1}{4}}$; d) $-2 \cdot 27^{\frac{1}{3}}$; e) $8^{\frac{2}{3}}$;

f) $2^{-2} \cdot 64^{\frac{1}{2}}$; g) $3^{-2} \cdot 81^{1,6}$; h) $64^{\frac{2}{3}}$; i) $100^{-\frac{1}{2}}$; j) $81^{-\frac{2}{3}}$;

- k) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$; l) $64^{-\frac{2}{3}}$; m) $\sqrt[3]{2^4}$; n) $\sqrt[4]{3^6}$; o) $\sqrt[5]{5^7}$; p) $\sqrt[15]{12^{30}}$;
q) $\sqrt[13]{7^a}$.

83. Určete na dvě desetinná místa přibližnou hodnotu mocniny $2^{1,875}$.

Řešení

$$1,875 = 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

$$\text{Je tedy } 2^{1,875} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}.$$

Vyhledáme-li hodnoty odmocnin v tabulkách, přičemž

$$\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\sqrt{2}}, \quad 2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{\sqrt{2}}, \quad \text{dostaneme:}$$

$$\sqrt{2} \doteq 1,414, \quad \sqrt[4]{2} \doteq 1,189, \quad \sqrt[8]{2} \doteq 1,090.$$

$$\text{Mocnina } 2^{1,875} \doteq 2 \cdot 1,414 \cdot 1,189 \cdot 1,090 \doteq 3,66.$$

$$\text{Závěr: } 2^{1,875} \doteq 3,66.$$

84. Určete na dvě desetinná místa přibližnou hodnotu mocniny

a) $3^{1,75}$; b) $2^{2,25}$.

85. Proveďte a výsledek uveďte desetinným číslem zaokrouhleným na dvě desetinná místa:

a) $\left[\left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}\right) : 2^{-\frac{4}{5}}\right]^{\frac{20}{19}}$; b) $\frac{3^{\frac{5}{12}} \cdot 7^{\frac{5}{6}} \cdot 7^{-\frac{1}{2}}}{3^{-\frac{3}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}.$

86. Proveďte a uveďte podmínky, za kterých mají smysl výrazy:

a) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{3}{2}}$; b) $z^{\frac{1}{3}} \cdot z^{-\frac{3}{4}} \cdot z^{\frac{2}{5}}$; c) $(x-y)^{\frac{2}{3}} \cdot (y-x)^{\frac{3}{4}}$;

d) $p^{\frac{3}{4}} : p^{\frac{3}{5}}$; e) $u^{-\frac{3}{5}} : u^{-\frac{3}{4}}$; f) $(a^2)^{\frac{1}{3}}$; g) $\left(q^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{5}}$; h) $\left(-a^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{5}}.$

87. a) $\left(a^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{9}} \cdot \left(a^{\frac{13}{12}}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(a^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}$; b) $3 \cdot a^{\frac{7}{10}} \cdot a^{\frac{2}{5}} \cdot 2a^{\frac{15}{14}} : a^{\frac{9}{28}};$

c) $\left(a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} : \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{2}{3}}$; d) $\left(ab^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(b^{-1} \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}.$

88. a) $\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)^3 - \left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)^3$; b) $\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right) - \left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2;$

c) $\frac{a-1}{a^{\frac{1}{2}}+1} + \frac{a-1}{a^{\frac{1}{2}}-1}.$

89. Dokažte, že platí:

$$a) \frac{1 - a^{-\frac{1}{2}}}{1 + a^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}}{a - 1} = \frac{2}{1 - a}, \quad a > 0, a \neq 1;$$

$$b) \frac{a - b}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} - \frac{a + b}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = 2(ab)^{\frac{1}{3}}; \quad a \neq b, a \neq -b, a \geq 0, b \geq 0.$$

90. Proveďte: $\left(1 + \frac{x^{-n} + y^{-n}}{x^{-n} - y^{-n}}\right)^{-2}$, je-li $x = 4$, $y = \frac{3}{4}$, $n = \frac{1}{2}$.

*91. Proveďte:

$$a) \left[\left(a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right)^{-1} \cdot (a - x) - \frac{a + x}{a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}} \right] \cdot 2^{-1} \cdot (ax)^{-\frac{1}{3}};$$

$$b) \left[x(1 - x)^{-\frac{2}{3}} + \frac{x^2}{(1 - x)^{\frac{5}{3}}} \right] : (1 - x)^{\frac{1}{3}} \cdot (1 - 2x + x^2)^{-1};$$

$$c) \left[\frac{(a - 1)^{-1}}{a^{-3}} - (1 - a)^{-1} \right] \cdot \frac{a^0 + a(a - 2)}{a^2 - a + 1} : \left[\frac{1}{(a + 1)^{-2}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

92. Upravte výraz $x = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[11]{a^{11}}}$ převodem odmocnin na mocniny s racionálními exponenty.

Řešení

$$\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[11]{a^{11}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{11}{12}}} = \frac{a^{\frac{6}{12}} \cdot a^{\frac{8}{12}} \cdot a^{\frac{9}{12}}}{a^{\frac{11}{12}}} = \frac{a^{\frac{23}{12}}}{a^{\frac{11}{12}}} = a^{\frac{12}{12}} = a.$$

Výraz x má smysl jen pro čísla $a > 0$.

Závěr: Daný výraz má hodnotu $x = a$, je-li $a > 0$.

93. Převodem na mocniny s racionálním exponentem proveďte:

$$a) \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[11]{a^5}}; \quad b) \frac{\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b^{-1}}}{\sqrt[6]{ab}}.$$

94. a) Dokažte, že pro všechna čísla $a > 0$ platí vztah

$$\frac{\sqrt[3]{a^{1-x}} \cdot \sqrt[3]{a^{1+x}}}{\sqrt[3]{a^{6x-1}}} = a^{1-x}, \text{ kde } x \text{ je libovolné racionální číslo.}$$

b) Je-li číslo $a > 0$, dokažte užitím mocnin s racionálními exponenty

$$\text{vztah } \frac{\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{a}.$$

95. Pro která čísla a je definována mocnina a^n , kde n je číslo iracionální?

96. Proveďte:

$$\text{a) } a^{1+\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}}; \quad \text{b) } (ab)^{\frac{2}{3}\sqrt{2}} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}\sqrt{2}}}{b^{\frac{2}{3}\sqrt{2}}};$$

$$\text{c) } \frac{x^{\sqrt{2}-1} \cdot x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{x^{\sqrt{3}-1}}; \quad \text{d) } (a^{\sqrt{3}+\sqrt{2}})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

Uveďte, za kterých podmínek mají tyto výrazy smysl.

97. Určete na tři desetinná místa hodnotu výrazu:

$$\text{a) } (10^{\sin 45^\circ})^{\cos 45^\circ}; \quad \text{b) } (10^{\sin 60^\circ})^{\lg 60^\circ}.$$

$$\left[\text{Návod: } \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

98. Upravte $\left(\frac{x}{y}\right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{\sqrt{3}-1}$. Jaký předpoklad musíme učinit o číslech x a y , má-li mít tento výraz smysl?

99. Proveďte:

$$\text{a) } \frac{2^e \cdot 3^{\sqrt{2}-1}}{3^e \cdot 3^{-2}}; \quad \text{b) } \left(\frac{3^{e+1} \cdot 2^{e-2}}{2^{e+1} \cdot 3^{e-3}}\right)^n; \quad \text{c) } \left(\frac{a^{\sqrt{2}} \cdot b^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}} \cdot b^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{6}}$$

$$\text{d) } \left(\frac{e^{x-\sqrt{2}}}{e^{x+\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{3}} \cdot e^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

$$100. \text{ a) } \frac{(a-b) \cdot (a+b)^{2\pi}}{a^2 - b^2}; \quad \text{b) } \left(\frac{(ab)^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot (a^{\sin 60^\circ})^2}{b^{\cos 60^\circ} \cdot b^{\sin 30^\circ}}\right)^{-1};$$

$$\text{c) } \frac{(x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - y^{\sqrt{2}})^2 \cdot y^{1-\sqrt{3}}}{xy}$$

4. OPAKOVÁNÍ

2

101. Proveďte:

a) $0,5a^m b^n c^3 : \left(-\frac{2}{3} a^2 bc\right); a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0;$

b) $1,5x^{m+1}y^{n-1} : 3x^{m-1}y^{n-2}; x \neq 0, y \neq 0.$

102. a) $\frac{2a^2b^3c \cdot a^m b^n c^3 \cdot 6x^{m+1} \cdot x^3}{3x^2y^3 \cdot x^m y^n b^{n-2}}; x \neq 0, y \neq 0, b \neq 0;$

b) $\frac{5a^n b^{n+3} c^{n+2}}{6x^{n-4} y^{n-2} z^{n-3}} : \frac{3a^{n-1} b^{n+1}}{2x^n y^n z^{n+1}}; a \neq 0, b \neq 0, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0.$

103. a) $\frac{3a^{-4}b^{-3}}{5c^{-3}d^{-4}} \cdot \frac{15c^{-3}d^{-2}}{4a^{-3}b^{-6}} \cdot \frac{2b^{-3} \cdot d^{-2}}{3c^{-6} \cdot a^{-1}}; a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0;$

b) $\frac{9a^{-3} \cdot b^{-2}}{16cd^{-3}} \cdot \left(\frac{48c^{-3}d^{-4}}{27a^{-5}b^{-3}}\right)^{-1} : \frac{2^{-5} \cdot a^{-1}b^{-3}}{3^{-2} \cdot d^3c^{-1}}; a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0.$

104. $\left[\frac{a^{4-2n} \cdot b^{3-2m}}{c^{3-n}d^{4-2n}} : \frac{c^{3-n}d^{4-m}}{a^{4-n}b^{3-3m}}\right]^{-1} : \frac{a^{1-2n}b^{3-m}}{c^{1-2n}d^{1-3m}}; a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0,$
 $d \neq 0; n, m$ celá čísla.

*105. Dokažte, že pro každé reálné číslo $x = \frac{1}{a-1}, a \neq 0, a \neq 1$ má výraz

$$v = \frac{1 + (a+x)^{-1}}{1 - (a+x)^{-1}} \cdot \left[1 - \frac{1 - (a^2 + x^2)}{2ax}\right] \text{ hodnotu } \frac{a^3}{2} \cdot (a-1)^{-1}.$$

106. Proveďte: a) $\left(\frac{4}{5}\right)^0 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} + \left(-\frac{10}{7}\right)^{-3} - (-2)^{-4};$

b) $\left(\frac{4}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{9}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{16}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{25}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{9}{20} \cdot a^{\frac{1}{2}}; a > 0;$

c) $5^{\frac{4}{5}} \cdot 125 \cdot 25^{-0,4} \cdot 5^{\frac{1}{5}}; \quad d) 7 \cdot 3^{\frac{2}{3}} + 6 \cdot 81^{\frac{1}{6}} - 8 \cdot 9^{\frac{1}{4}} - 5 \cdot 27^{\frac{2}{3}};$

e) $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{7}{12}}\right) \left(a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{12}}\right); a \neq 0.$

107. $\left\{1 - \left[x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]^2\right\}^{-1} \cdot (1+x^2)^{-1} \left[x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right].$

108. $\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}$. Jakou hodnotu má tento výraz pro

$$a = \frac{1}{16}, b = \frac{1}{81}?$$

109. Proveďte a udejte, pro která reálná čísla x má smysl výraz

$$y = \left[\frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{3}}} \right]^{-1} - \left(\frac{1-2x}{3x-2} \right)^{-1}.$$

110. Zjednodušte výrazy:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^{-1}}}$; $a > 0$; b) $\frac{\sqrt{a} \sqrt[3]{a} \sqrt[4]{a}}{\sqrt[12]{a^3}}$; $a > 0$;

upravte:

c) $\frac{(1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$; d) $\frac{(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$;

e) $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{10} + \sqrt{5}} + \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}} - \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}.$

111. $\sqrt[3]{\sqrt{12}-2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{12}+2} + \sqrt[3]{7+\sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7-\sqrt{22}}.$

*112. $\left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \right)^3 + \left(\frac{3}{2 + \sqrt{3}} + 3\sqrt{3} \right)^4.$

113. $\frac{23}{3 - \sqrt[3]{4}} \cdot [\text{Návod: } 3 - \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{4}; \text{ dále využijte vzorce}$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3.]$$

114. $x = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}.$

[Návod: Utvořte x^2 a po úpravě určete x .]

115. Upravte výraz

a) $v = \left[a\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{1 - \sqrt{\frac{b}{a}}} \right] : \frac{b + \sqrt{ab}}{b\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$; $a > 0, b > 0, a \neq b$;

$$\text{b) } \sqrt[3]{a^{-3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^{-3} \cdot b^2} \cdot \sqrt[3]{ab}}; \quad a > 0, b > 0;$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-1} \cdot a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{a^{-1} \cdot b^{\frac{2}{3}}}}; \quad a > 0, b > 0;$$

$$\text{d) } 8a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{y^{-\frac{1}{3}} \cdot q \sqrt[3]{y^{\frac{4}{3}}}} \cdot \sqrt[3]{a^{\frac{2}{3}} y}; \quad a > 0, y > 0.$$

116. Dokažte, že výraz $v = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2}$ má hodnotu $v = 2(x-1)$ pro $x \geq 2$, hodnotu $v = 2$ pro $0 \leq x < 2$ a hodnotu $v = 2(1-x)$ pro $x < 0$.

117. Dokažte, že pro všechna reálná čísla $x > 0$ platí

$$\frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} \leq \frac{1}{4}.$$

118. Určete všechna reálná čísla a , která splňují nerovnost

$$\text{a) } \sqrt{a} > \sqrt{1-a}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{a^2-1} < \sqrt[3]{a^2}.$$

119. Je-li p libovolné reálné číslo, dokažte, že výraz

$$\frac{1}{1 + \sqrt{p^2+1} + p} + \frac{1}{1 + \sqrt{p^2+1} - p}$$

má hodnotu nezávislou na čísle p .

120. a) Určete všechna reálná čísla x , která splňují nerovnost

$$\frac{6x - 5\sqrt{x} + 1}{1 - \sqrt{x}} \leq 0.$$

[Návod: Položte $\sqrt{x} = y$; potom $6y^2 - 5y + 1 = (3y-1)(2y-1)$.]

- b) Upravte výraz:

$$\frac{a+x}{a+\sqrt{a-x^2}} + \frac{a-x}{a-\sqrt{a-x^2}} \text{ a stanovte jeho hodnotu pro } a=1 \text{ a } x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$