Obmenená a obrátená implikácia

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Reč bude o obrátenej a obmenenej implikácii.

Ž: **Implikáciu** *dostaneme, ak dva výroky spojíme spojkou „ak, tak".*

U: Správne. Ako príklad zvoľme implikáciu $A \Rightarrow B$, pričom výroky A, B znejú takto:

A : Na oblohe je dúha.

B : Prší.

Ž: *Implikácia bude potom znieť:*

$A \Rightarrow B$: *Ak je na oblohe dúha, tak prší.*

Dokonca je to pravdivá implikácia. Naozaj. Z toho, že vidím na oblohe dúhu, vyplýva, že vonku prší. **Bez dažďa** *predsa* **dúha nie je možná.**

U: Aj to nie počas každého, ale o tom za chvíľku . . . Skús obrátiť túto implikáciu $A \Rightarrow B$.

Ž: *Ako obrátiť? Mám zameniť výroky A a B?*

U: Áno.

Obrátenou implikáciou k implikácii $A \Rightarrow B$ nazývame výrok $B \Rightarrow A$.

Ž: *Obrátená implikácia k pôvodnej implikácii $A \Rightarrow B$ vyzerá nasledovne:*

$B \Rightarrow A$: *Ak prší, tak je na oblohe dúha.*

Ale to nie je pravda. Nie vždy, keď prší, je na oblohe dúha. Aby bola dúha, musí naviac ešte svietiť slnko.

U: Presne tak. Musia mať teda implikácie pôvodná a k nej obrátená rovnakú pravdivostnú hodnotu?

Ž: *Nie, nemusia. Teraz sme si to ukázali.*

U: Čiže

obrátená a pôvodná implikácia nemusia mať rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Teraz by sme chceli implikáciu $A \Rightarrow B$ ***obmeniť*** tak, aby sa pravdivostná hodnota pôvodnej a obmenenej implikácie zachovala. Pred chvíľou si povedal, že ***bez dažďa nie je dúha možná***. Skús toto svoje tvrdenie preformulovať do implikácie.

Ž: *Hm, . . . asi takto:*

Ak neprší, tak nie je na oblohe dúha.

U: Výborne. Toto je obmenená implikácia k pôvodnej implikácii. Skúsme ju ešte zapísať symbolicky. V predpoklade (za spojkou „ak“) máme výrok:

Neprší.

To je vlastne ***negácia*** výroku B, teda výrok $\neg B$. Aký výrok je v závere (za spojkou „tak“)?

Ž: *Je to negácia výroku A, čiže výrok*

$\neg A$: *Na oblohe nie je dúha.*

U: Už sme pripravení na definíciu.

Obmenenou implikáciou k implikácii $A \Rightarrow B$ ***nazývame výrok*** $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Dôležitý je fakt, že

obmenená a pôvodná implikácia majú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Ž: *Jasné. Obmenená a pôvodná implikácia hovoria vlastne to isté, len inými slovami.*

U: Treba podotknúť, že koretný dôkaz sa robí pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt. Nájdeš ho medzi príkladmi.

pôvodná implikácia: $A \Rightarrow B$

obrátená implikácia k pôvodnej: $B \Rightarrow A$

obmenená implikácia k pôvodnej: $\neg B \Rightarrow \neg A$

$p(A \Rightarrow B)$, $p(B \Rightarrow A)$ sa nemusia rovnať

$p(A \Rightarrow B)$, $p(\neg B \Rightarrow \neg A)$ sa vždy rovnajú

Ž: *Prečo vôbec hovoríme o obrátenej a obmenenej implikácii?*

U: Dobrá otázka. Matematika je vybudovaná systematicky z istých základov. Každé nové tvrdenie musí jednoznačne vyplývať z týchto základov.

Ž: *Ako sa to dá ustriehnuť?*

U: To sa musí dokázať. Existuje viac spôsobov dokazovania. Jedným z nich je takzvaný ***nepriamy dôkaz***. Ten využíva práve obmenenú implikáciu.

Ž: *Môžeme aspoň trochu načrtnúť, ako?*

U: Samozrejme. Nech písmeno n označuje určité prirodzené číslo. Ak chceme dokázať napríklad implikáciu:

„Ak n^2 je párne, tak aj n je párne.“,

jednoduchšie bude namiesto nej dokázať obmenu. Skús ju určiť.

Ž: *Najprv negujem záver pôvodnej implikácie, ten znie: „n nie je párne“. Potom predpoklad: „n^2 nie je párne“. Tak obmenená implikácia znie:*

„Ak n nie je párne, tak ani n^2 nie je párne.“,

U: Pri dokazovaní spomínaného tvrdenia je ľahšie vychádzať z predpokladu, ktorý hovorí o čísle n, ako z predpokladu, ktorý hovorí o jeho druhej mocnine n^2. Dôležitý je fakt, že obe implikácie, pôvodná aj k nej obmenená, majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Ž: *A ako to teda dokážeme.*

U: To je predmetom témy, v ktorej sa preberajú typy dôkazov. Tam je uvedený celý dôkaz.

Príklad 1: *Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt ukážte, že implikácia a k nej obmenená implikácia majú vždy rovnaké pravdivostné hodnoty.*

U: Najprv si zopakujme, aká je to implikácia obmenená k pôvodnej.

Ž: *Ak mám implikáciu $A \Rightarrow B$, tak obmenená k nej je $\neg B \Rightarrow \neg A$.*

U: Správne. Teraz si zapíšme, aké stĺpce bude obsahovať tabuľka pravdivostných hodnôt potrebná na náš dôkaz. Môžeš pri tom sledovať nižšie uvedenú tabuľku.

Ž: *V prvých dvoch stĺpcoch budú pravdivostné hodnoty výroku A a B. Do tretieho dám pravdivostné hodnoty implikácie $A \Rightarrow B$.*

U: A ako sa postupne dopracujeme k pravdivostným hodnotám obmeny $\neg B \Rightarrow \neg A$?

Ž: *Najprv vytvorím stĺpec pre pravdivostné hodnoty $\neg B$ a stĺpec pre $\neg A$. No a v poslednom stĺpci už môžu byť pravdivostné hodnoty obmeny $\neg B \Rightarrow \neg A$.*

U: Výborne. Ktoré dva stĺpce máme v závere porovnať?

Ž: *Tretí – odpovedajúci $p(A \Rightarrow B)$ a posledný – odpovedajúci $p(\neg B \Rightarrow \neg A)$.*

U: OK. V tabuľke sme ich znázornili červenou.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A)$	$p(\neg B \Rightarrow \neg A)$

U: Hor' sa do vypĺňania tabuľky. Určme najprv počet riadkov. Koľko bude všetkých možných kombinácii pravdivostných hodnôt výrokov A a B?

Ž: *To viem, sú to štyri možnosti:*

- *oba výroky A, B sú pravdivé, do prvého riadku tabuľky píšem* 1, 1;
- *výrok A je pravdivý, výrok B nepravdivý, do druhého riadku píšem* 1, 0;
- *výrok A je nepravdivý, výrok B pravdivý, do tretieho riadku píšem* 0, 1;
- *oba výroky A, B sú nepravdivé, do štvrtého riadku píšem* 0, 0.

U: Správne. Teraz vyplňme tretí stĺpec. Implikácia $A \Rightarrow B$ je nepravdivá iba v jedinom prípade. A to vtedy, keď z pravdy dostaneme nepravdu. Preto 0 píšeme len do druhého riadku, kde $p(A) = 1$ a $p(B) = 0$. Vo zvyšných troch riadkoch píšeme pravdivostnú hodnotu 1.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A)$	$p(\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1			
1	0	0			
0	1	1			
0	0	1			

Ž: *Štvrtý a piaty stĺpec bude ľahké vyplniť. V nasledujúcej tabuľke ich vypĺňam modrou farbou. Negácia mení pravdivostnú hodnotu z* 0 *na* 1 *a naopak. Preto v štvrtom stĺpci (odpovedajúcom* $p(\neg B)$*) budú hodnoty opačné ako v druhom stĺpci (odpovedajúcom* $p(B)$*). No a piaty stĺpec (odpovedajúci* $p(\neg A)$*) rovnako súvisí s prvým stĺpcom (odpovedajúcom* $p(A)$*).*

U: Výborne. Ostáva posledný stĺpec.

Ž: *To už sme mali. Pamätám si, že implikácia je nepravdivá iba v jedinom prípade. A to keď z pravdy vyplýva nepravda. Preto* 0 *píšem len do druhého riadku, kde* $p(\neg B) = 1$ *a* $p(\neg A) = 0$*.*

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A)$	$p(\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

U: Zvládol si to veľmi dobre. Ešte to všetko zhrňme. Ukázali sme, že červeno znázornené stĺpce (tretí a posledný) sa naozaj rovnajú. To znamená, že pre všetky možné kombinácie pravdivostných hodnôt výrokov A a B majú výroky $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$ rovnakú pravdivostnú hodnotu. Teda pôvodná implikácia a k nej obmenená sú ekvivalentné.

Príklad 2: *Majme výrok:*

Ak je prirodzené číslo deliteľné deviatimi, tak je deliteľné aj tromi.

Napíšte obrátenie a obmenu tejto implikácie. Určte pravdivostné hodnoty pôvodnej implikácie, k nej obrátenej aj obmenenej.

U: Najprv urč pravdivostnú hodnotu pôvodnej implikácie.

Ž: *Vypíšem si zopár prvých prirodzených čísel deliteľných deviatimi:*

$$9,\ 18,\ 27,\ 36,\ 45,\ \ldots$$

Všetky sú deliteľné aj tromi.

U: Platí to vždy?

Ž: *Hocijaké prirodzené číslo deliteľné číslom* 9 *musí byť deliteľné aj číslom* 3*. Lebo samotné číslo* 9 *je deliteľné číslom* 3*.*

U: Teda ***pravdivostná hodnota pôvodnej implikácie je*** 1. Poďme ďalej. Zapíš obrátenú implikáciu k pôvodnej. Najprv povedz všeobecne, aká je to obrátená implikácia k pôvodnej implikácii $A \Rightarrow B$.

Ž: *Pri obrátenej implikácii len obrátim šípku. Tak dostanem implikáciu $A \Leftarrow B$, respektíve $B \Rightarrow A$.*

U: Správne. Zamenil si predpoklad za záver a naopak. Obráť teraz našu pôvodnú implikáciu:

Ak ***je prirodzené číslo deliteľné deviatimi***, tak ***je deliteľné aj tromi***.

Ž: **Obrátená implikácia** *znie:*

Ak **je prirodzené číslo deliteľné tromi**, *tak* **je deliteľné aj deviatimi**.

U: Teraz urč jej pravdivostnú hodnotu.

Ž: *Opäť si vypíšem zopár prvých prirodzených čísel deliteľných tromi:*

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ \ldots$$

Už prvé číslo 3 *nie je deliteľné deviatimi. Preto* **obrátená implikácia k pôvodnej nie je pravdivá**.

U: Správne. Obrátená implikácia k pôvodnej môže ale nemusí mať rovnakú pravdivostnú hodnotu ako pôvodná implikácia. V našom prípade sú ich pravdivostné hodnoty rôzne. Teraz zapíš obmenenú implikáciu k pôvodnej.

Ž: *Ak si dobre pamätám, obmenená implikácia má tiež zamenený predpoklad za záver a naopak. Naviac sú ešte predpoklad a záver znegované.*

U: Symbolicky to môžeme zapísať nasledovne:

obmenou k implikácii $A \Rightarrow B$ je implikácia $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Môžeš to už aplikovať na našu konkrétnu implikáciu:

Ak ***je prirodzené číslo deliteľné deviatimi***, tak ***je deliteľné aj tromi***.

Ž: **Obmenená implikácia** *znie:*

Ak **prirodzené číslo nie je deliteľné tromi**, *tak* **nie je deliteľné ani deviatimi**.

U: Správne. Ako to bude s pravdivostnou hodnotou obmenenej implikácie?

Ž: *Nevidím to hneď, ...*

U: Z teórie vieme, že pôvodná implikácia a k nej obmenená musia mať vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Ž: *Potom* **obmena bude tiež pravdivá**, *keďže aj pôvodná implikácia je pravdivá. Ale veľmi tomu neverím.*

U: Tak trochu porozmýšľaj nad našou obmenou:

Ak prirodzené číslo nie je deliteľné tromi, tak nie je deliteľné ani deviatimi.

Ž: *Hm, ... už to vidím. Jasné, že keď číslo nie je deliteľné tromi, napríklad čísla* 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, ..., *tak tobôž nemôže byť deliteľné deviatimi. Veď deväť je deliteľné tromi.*

U: Presne tak. Pôvodná implikácia a obmenená k nej hovoria to isté, len inými slovami.

Úloha 1: *Majme výrok:*

Ak je prirodzené číslo deliteľné štyrmi, tak je deliteľné aj dvoma.

Napíšte obrátenie a obmenu tohto výroku. Určte pravdivostné hodnoty pôvodnej implikácie, k nej obrátenej aj obmenenej.

Výsledok:

pôvodná implikácia je pravdivá;

obrátená implikácia: „Ak je prirodzené číslo deliteľné dvomi, tak je deliteľné aj štyrmi.“; nie je pravdivá;

obmenená implikácia: „Ak prirodzené číslo nie je deliteľné dvomi, tak nie je deliteľné ani štyrmi.“; je pravdivá

Príklad 3: *Napíšte obrátenú a obmenenú vetu k implikácii:*

Ak vodič vidí prichádzajúci vlak, alebo počuje zvukové znamenie prichádzajúceho vlaku,

nesmie vojsť na železničný priechod.

Ktorá z nových implikácii je ekvivalentná s pôvodnou?

Ž: *Ak mám napísať* **obrátenú implikáciu***, tak len zamením predpoklad (čo je výrok za spojkou „ak“) so záverom (teda výrokom za spojkou „tak“). Tak dostanem výrok:*

Ak vodič nesmie vojsť na železničný priechod,

tak vidí prichádzajúci vlak, alebo počuje zvukové znamenie prichádzajúceho vlaku.

U: Správne. Je táto obrátená implikácia ekvivalentná s pôvodnou?

Ž: *Čo to znamená „ekvivalentná“?*

U: Či vyjadruje to isté, čo pôvodné tvrdenie. Korektne matematicky povedané: či majú pôvodná a obrátená implikácia tú istú pravdivostnú hodnotu.

Ž: *Pôvodné tvrdenie vyzerá ako nejaké pravidlo cestnej premávky. Takže chce byť pravdivé. No obrátená implikácia k nemu nemusí byť tiež pravdivá.*

U: Vedel by si to zdôvodniť na tomto príklade?

Ž: *Obrátená implikácia tvrdí:*

Ak vodič nesmie vojsť na železničný priechod,

tak vidí prichádzajúci vlak, alebo počuje zvukové znamenie prichádzajúceho vlaku.

No a z toho, že vodič nemohol vojsť na železničný priechod, môže vyplývať aj niečo úplne iné. Dôvodom mohol byť napríklad spadnutý strom, nie prichádzajúci vlak.

U: Veľmi dobre si to zdôvodnil. Pokračujme obmenenou implikáciou.

Ž: *Pamätám si, že tá má vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu ako pôvodná implikácia.*

U: Pamätáš si to dobre. Obmenená implikácia k pôvodnej $A \Rightarrow B$ vyzerá takto: $\neg B \Rightarrow \neg A$. Teda okrem toho, že zameníme predpoklad so záverom, ešte ich aj znegujeme. Ako bude teda vyzerať obmena k nášmu výroku?

Ž: *Pôvodný výrok má za spojkou „ak“ zložený výrok:*

Vodič vidí prichádzajúci vlak, **alebo** *počuje zvukové znamenie prichádzajúceho vlaku.*

U: To je disjunkcia. Pripomeňme si jej negáciu.

Ž: *Negáciou výroku $A \vee B$ dostaneme výrok $\neg A \wedge \neg B$. Preto negácia našej disjunkcie znie:*

Vodič **nevidí** *prichádzajúci vlak* **a zároveň**

nepočuje *zvukové znamenie prichádzajúceho vlaku.*

U: Čiže celá ***obmena*** znie:

Ak vodič ***smie*** vojsť na železničný priechod,

tak ***nevidí*** prichádzajúci vlak, ***ani nepočuje*** zvukové znamenie prichádzajúceho vlaku.

Ž: *No, už skôr sme si povedali, že je ekvivalentná s pôvodnou implikáciou.*

Úloha 1: *Napíšte obrátenú a obmenenú vetu k implikácii:*

Ak má štvoruholník všetky štyri strany rovnako dlhé, tak je to štvorec alebo kosoštvorec.

Ktorá z nových implikácii je ekvivalentná s pôvodnou?

Výsledok:

obrátená implikácia: „Ak je štvoruholník štvorec alebo kosoštvotec, tak má všetky štyri strany rovnako dlhé.“;

obmenená implikácia: „Ak štvoruholník nie je štvorec ani kosoštvotec, tak nemá všetky štyri strany rovnako dlhé.“; je ekvivalentná s pôvodnou implikáciou

Príklad 4: *O dvoch reálnych číslach a, b platí nasledujúci výrok:*

$$V: \textit{ Ak je každé z čísel } a, b \textit{ kladné, tak aj súčin } a \cdot b \textit{ je kladný.}$$

a) Vyslovte obmenu implikácie.

b) Vyslovte obrátenú implikáciu a rozhodnite o jej platnosti.

U: Začnime úlohou ***a)***. Najprv povedz všeobecne, ako znie obmena implikácie $A \Rightarrow B$.

Ž: *To viem. Jej obmenou je výrok $\neg B \Rightarrow \neg A$.*

U: Správne. Okrem toho, že si predpoklad so záverom zamenil, ešte si ich aj znegoval. Môžeš vytvoriť obmenu k implikácii

V : Ak ***je každé z čísel*** a, b ***kladné***, tak ***aj súčin*** $a \cdot b$ ***je kladný***.

Ž: *Negáciou predpokladu*

Každé z čísel a, b je kladné.

dostanem

Každé z čísel a, b je záporné.

U: S tým nemôžem súhlasiť. Negácia musí zahŕňať všetky zvyšné možnosti. Tebe úplne vypadla možnosť, keď napríklad jedno z čísel a, b je kladné, druhé záporné.

Ž: *Jasné. Pozabudol som na to. Slovné spojenie*

„každé ... je" negujem ako „aspoň jedno ... nie je".

U: Presne tak. Ako bude teda znieť negácia predpokladu výroku V?

Ž: *Dúfam, že to už bude správne:*

Aspoň jedno z čísel a, b nie je kladné.

Namiesto „nie je kladné" napíšem „je záporné".

U: Pozor, pozor. A kde je nula? Ak číslo nie je kladné, nemusí byť hneď záporné, môže to byť aj nula. Povieme, že je to číslo nekladné.

Ž: *OK. Teda negácia predpokladu výroku V znie:*

Aspoň jedno z čísel a, b je nekladné.

U: Neguj záver:

Súčin $a \cdot b$ ***je kladný.***

Ž: *Už som sa poučil. Negáciou bude výrok:*

Súčin $a \cdot b$ je nekladný.

U: Všetko je pripravené na vyslovenie obmeny výroku V.

Ž: *Tu je:*

Ak **je súčin $a \cdot b$ nekladný**, *tak* **aspoň jedno z čísel a, b je nekladné**.

U: Nie je to síce súčasťou zadania, ale napriek tomu skús určiť, či je tento výrok pravdivý.

Ž: *Myslím, že je pravdivý?*

U: Si si istý?

Ž: *Hm, ... áno, už viem, prečo. Obmena aj pôvodný výrok majú rovnakú pravdivostnú hodnotu. No a zadanie hovorí:*

O dvoch reálnych číslach a, b **platí** *nasledujúci výrok: ...*

Z toho, vyplýva, že pôvodný výrok je pravdivý. Preto aj jeho obmena je pravdivá.

U: Vynašiel si sa. Poďme na úlohu ***b)***. Najprv povedz všeobecne, aká je to obrátená implikácia k implikácii $A \Rightarrow B$.

Ž: *Len obrátim šípku, čím dostanem implikáciu*

$$A \Leftarrow B, \text{ resp. } B \Rightarrow A.$$

U: OK. Môžeš obrátiť našu implikáciu

V : Ak ***je každé z čísel*** a***,*** b ***kladné***, tak ***aj súčin*** $a \cdot b$ ***je kladný***.

Ž: *To nie je ťažké:*

Ak **je súčin** $a \cdot b$ **kladný**, *tak* **každé z čísel** a**,** b **je kladné**.

U: Ako to bude s jej pravdivostnou hodnotou? Súvisí pravdivosť obrátenej implikácie s pravdivosťou pôvodnej implikácie?

Ž: *Ak si dobre pamätám, tak tam nie je žiaden súvis.*

U: Dobre si to pamätáš. Takže ako je to s pravdivosťou našej obrátenej implikácie? Naozaj z toho, že súčin $a \cdot b$ je kladný, vyplýva, že obe čísla a, b sú kladné?

Ž: *Chvíľku musím porozmýšľať ... Nie, neplatí to. Aj keď vynásobím dve záporné čísla, dostanem kladný výsledok. Napríklad z toho, že $(-2) \cdot (-3) = 6$, čo je kladné číslo, nevyplýva, že čísla -2 a -3 sú kladné.*

U: Je to veľmi pekne zdôvodnené. Teda naša ***obrátená implikácia neplatí***.

Úloha 1: *O dvoch reálnych číslach a, b platí nasledujúci výrok:*

V : *Ak sa aspoň jedno z čísel a, b rovná nule, tak $a \cdot b = 0$.*

a) Vyslovte obmenu implikácie.

b) Vyslovte obrátenú implikáciu a rozhodnite o jej platnosti.

Výsledok:

a) Ak $a \cdot b \neq 0$, tak ani jedno z čísel a, b sa nerovná nule.

b) Ak $a \cdot b = 0$, tak sa aspoň jedno z čísel a, b rovná nule.

aj obrátená implikácia je pravdivá

Príklad 5: *Určte, ktorý z nasledujúcich výrokov je ekvivalentný s výrokom:*

Ak je štvoruholník obdĺžnikom,

tak sú jeho protiľahlé strany rovnobežné a rovnako dlhé.

- A: *Ak sú protiľahlé strany štvoruholníka rovnobežné a rovnako dlhé, tak je to obdĺžnik.*
- B: *Ak štvoruholník nie je obdĺžnikom, tak jeho protiľahlé strany buď nie sú rovnobežné alebo nie sú rovnako dlhé.*
- C: *Ak protiľahlé strany štvoruholníka nie sú rovnobežné alebo rovnako dlhé, tak to nie je obdĺžnik.*

U: Najprv si objasnime, čo to znamená, že ***dva výroky sú ekvivalentné***.

Ž: *Hovoria o tom istom, len inými slovami.*

U: V podstate máš pravdu. Korektne matematicky povedané: ***majú rovnakú pravdivostnú hodnotu***. Urč pravdivostnú hodnotu nášho pôvodného výroku:

Ak je štvoruholník obdĺžnikom,

tak sú jeho protiľahlé strany rovnobežné a rovnako dlhé.

Ž: *Je* **pravdivý***. Obdĺžnik predsa má protiľahlé strany rovnobežné a rovnako dlhé.*

U: Správne. Naviac dodajme, že je to zložený výrok v tvare implikácie. Vedel by si povedať, ako bude vyzerať implikácia, ktorá má rovnakú pravdivostnú hodnotu s pôvodnou implikáciou? Teda, ktorá je s ňou ekvivalentná?

Ž: *Hm, ...*

U: Nevadí, dostaneme sa k tomu postupne. Zhrňme si to. Náš pôvodný výrok je pravdivý. Zistíme pravdivostné hodnoty výrokov A, B, C. Z toho potom určíme, ktorý je ekvivalentný s naším pôvodným výrokom, teda ktorý je tiež pravdivý. Poďme na to.

Ž: *Výrok*

A : *Ak sú protiľahlé strany štvoruholníka rovnobežné a rovnako dlhé, tak je to obdĺžnik.*

je tiež pravdivý.

U: Naozaj? Čo taký rovnobežník?

U: Má protiľahlé strany rovnobežné?

Ž: *Má.*

U: Sú aj rovnako dlhé?

Ž: *Sú.*

U: No vidíš. A napriek tomu to nie je obdĺžnik.

Ž: *Jasné. Takže výrok A* **je nepravdivý**.

U: Pokračujme výrokom

B : Ak štvoruholník nie je obdĺžnikom,

tak jeho protiľahlé strany buď nie sú rovnobežné alebo nie sú rovnako dlhé.

Platí to?

Ž: *Hm, ... nie,* **výrok B neplatí**. *Opäť si to môžeme ukázať na rovnobežníku. Je to štvoruholník, ktorý nie je obdĺžnikom, ale aj tak má protiľahlé strany rovnobežné aj rovnako dlhé.*

U: Správne. Vedel by si povedať, čím sa líši rovnobežník od obdĺžnika?

Ž: *Áno. Obdĺžnik má všetky štyri vnútorné uhly pravé. Rovnobežník nie.*

U: Len tak pre zaujímavosť, vedel by si doplniť záver predchádzjúcej implikácie, aby bola pravdivá?

Ž: *Áno:*

Ak štvoruholník nie je obdĺžnikom, tak jeho protiľahlé strany buď nie sú rovnobežné

alebo nie sú rovnako dlhé alebo nie sú jeho všetky štyri vnútorné uhly pravé.

U: Výborne. Ostáva nám výrok

C : Ak protiľahlé strany štvoruholníka nie sú rovnobežné alebo rovnako dlhé,

tak to nie je obdĺžnik.

Ž: *Ten už musí byť pravdivý, keďže nemáme inú možnosť.*

U: A čo keď ani jedna z možností nevyhovuje? Nože to over.

Ž: *Aj tak* **je výrok C pravdivý**. *Obdĺžnik musí mať protiľahlé strany rovnobežné aj rovnako dlhé. Ak aspoň jedna z týchto dvoch vlastností neplatí, tak to už nemôže byť obdĺžnik.*

U: Správne. No a táto implikácia je obmenou k pôvodnej implikácii. Ak sa na to poriadne pozrieš, tak sme zamenili predpoklad so záverom a naviac sme ich znegovali. Porovnaj si to v nasledujúcej tabuľke.

pôvodná implikácia $U \Rightarrow V$:
Ak ***je štvoruholník obdĺžnikom***,
tak ***sú jeho protiľahlé strany rovnobežné a rovnako dlhé***.

obmenená implikácia $\neg V \Rightarrow \neg U$:
Ak ***protiľahlé strany štvoruholníka nie sú rovnobežné alebo rovnako dlhé***,
tak ***to nie je obdĺžnik***.

U: Odpoveď znie: ***Ekvivalentný so zadaným výrokom je výrok*** C.

Úloha 1: *Určte, ktorý z nasledujúcich výrokov je ekvivalentný s výrokom:*

Ak je trojuholník rovnostranný,

tak dve jeho strany sú rovnako dlhé.

A: Ak sú dve strany trojuholníka rovnako dlhé, tak trojuholník je rovnostranný.

B: Ak trojuholník nemá dve strany rovnako dlhé, tak nemôže byť rovnostranný.

Výsledok: *B*