Tautológia a kontradikcia

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Čo majú spoločné nasledujúce výroky?

V_1: Prší alebo neprší.

V_2: Kúpim jablká alebo hrušky práve vtedy, keď kúpim hrušky alebo jablká.

Ž: *To sú nejaké nezmysly. Nemajú pre mňa žiadnu informáciu.*

U: Skús povedať, čím to je.

Ž: *Samozrejme, že vždy buď prší, alebo neprší.*

U: Takže, čo vieš povedať o pravdivostnej hodnote výroku V_1?

Ž: *Výrok*

Prší alebo neprší.

je vždy pravdivý.

U: A ako je to s výrokom V_2?

Ž: *Samozrejme, že kúpim jablká alebo hrušky iba vtedy, keď kúpim hrušky alebo jablká. Na ľavej aj pravej strane spojky „práve vtedy, keď" je v podstate to isté. Akurát je zamenené poradie toho, čo sa kupuje.*

U: Skrátka, nech kúpim čokoľvek, výrok V_2 bude vždy pravdivý.

Ž: *Takže to je to, čo majú spoločné. Oba výroky sú vždy pravdivé.*

U: No a také výroky nazývame ***tautológie***.

Ž: *Zvláštne slovo ...*

U: Je gréckeho pôvodu a preložiť ho môžeme ako „rovnakoreč". Je to preto, lebo veľmi často majú tautológie tvar ekvivalencie.

Ž: *Ako napríklad výrok V_2.*

U: Áno. No a na ľavej aj pravej strane spojky „práve vtedy, keď" je povedané to isté, len inými slovami. Preto tá „rovnakoreč". Korektná matematická definícia znie nasledovne.

Zložený výrok nazývame tautológiou vtedy,

keď jeho pravdivostná hodnota je 1

bez ohľadu na pravdivostné hodnoty výrokov, z ktorých pozostáva.

Ž: *Vždy určím tak intuitívne, či daný výrok je tautológiou?*

U: To teda nie. Matematika je predsa exaktná veda. Použijeme na to tabuľku pravdivostných hodnôt. Pozrime sa napríklad na náš výrok

V_1: Prší alebo neprší.

Je zložený z výroku

A: Prší.

a jeho negácie

$\neg A$: neprší.

Medzi nimi je spojka „alebo“. Čiže V_1 môžeme nahradiť disjunkciou

$$A \vee \neg A.$$

Ž: *Kde je tu tautológia?*

U: ***Výrok*** $A \vee \neg A$ ***je tautológiou.*** Dokážme to. Tabuľka bude mať tri stĺpce.

Ž: *Aké?*

U: V prvom budú pravdivostné hodnoty výroku A, v druhom pravdivostné hodnoty výroku $\neg A$, no a v poslednom pravdivostné hodnoty výroku $A \vee \neg A$.

Ž: *Riadky budú asi len dva. Výrok A má len dve možnosti: buď je pravdivý alebo nepravdivý.*

U: Správne. Presne si popísal prvý stĺpec.

Ž: *V druhom stĺpci sa pravdivostné hodnoty zamenia, keďže ide o negáciu.*

U: Áno. No a nakoniec disjunkcia je pravdivá vtedy, keď aspoň jeden z výrokov je pravdivý. U nás je to v oboch prípadoch. V poslednom stĺpci (zvýraznený červenou) sú naozaj samé jednotky. Tým je dôkaz ukončený.

$p(A)$	$p(\neg A)$	$p(A \vee \neg A)$
1	0	1
0	1	1

Ž: *To bolo dosť jednoduché.*

U: Skúsme ešte dokázať, že výrok V_2 je tautológiou. Najprv ho zapíšme pomocou symbolov.

Ž: *Výrok znie takto:*

Kúpim jablká **alebo** *hrušky* **práve vtedy, keď** *kúpim hrušky* **alebo** *jablká.*

Označím výroky B, C takto:

B : *Kúpim jablká.*

C : *Kúpim hrušky.*

Ide o ekvivalenciu, pričom na ľavej strane spojky „práve vtedy, keď“ je výrok $B \vee C$, no a na pravej $C \vee B$.

U: Výborne. Výrok V_2 môžeme symbolicky zapísať nasledovne:

$$(B \vee C) \Leftrightarrow (C \vee B).$$

Ak chceme dokázať, že teno výrok je tautológiou, doplňme nasledujúcu tabuľku:

$p(B)$	$p(C)$	$p(B \vee C)$	$p(C \vee B)$	$p((B \vee C) \Leftrightarrow (C \vee B))$

Má päť stĺpcov. V prvom je pravdivostná hodnota výroku B, v druhom pravdivostná hodnota výroku C. Tretí odpovedá pravdivostnej hodnote disjunkcie $B \vee C$, štvrtý pravdivostnej hodnote disjunkcie $C \vee B$. Takto postupne sme sa dostali až k poslednému stĺpcu, v ktorom je pravdivostná hodnota našej ekvivalencie $(B \vee C) \Leftrightarrow (C \vee B)$.

Ž: *Ak som to pochopil správne, tak práve v tomto stĺpci by mali byť samé jednotky, ak chceme ukázať, že spomínaný výrok je tautológiou.*

U: Presne tak. Teraz si uvedomme, koľko riadkov bude mať tabuľka. Musí zahŕňať všetky kombinácie pravdivostných hodnôt výrokov B, C.

Ž:

- *Buď sú oba výroky pravdivé, do prvého riadku píšem* 1, 1.
- *Alebo B je pravdivý, C nepravdivý, do druhého riadku píšem* 1, 0.
- *Ďalej môže byť B nepravdivý, C pravdivý, do tretieho riadku píšem* 0, 1.
- *No a nakoniec môžu byť oba výroky nepravdivé, do štvrtého riadku píšem* 0, 0.

U: Výborne. Presne si popísal prvé dva stĺpce tabuľky.

$p(B)$	$p(C)$	$p(B \vee C)$	$p(C \vee B)$	$p((B \vee C) \Leftrightarrow (C \vee B))$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

U: Ako to bude s ďalšími stĺpcami?

Ž: *Myslím, že tretí a štvrtý stĺpec budú rovnaké.*

U: Áno. Všímaj si teraz ďalšiu tabuľku. Disjunkcia $B \vee C$, respektíve $C \vee B$, je pravdivá vtedy, keď je pravdivý aspoň jeden z výrokov B, C. Preto v prvých troch riadkoch budú jednotky. Posledný riadok odpovedá tomu, že oba výroky B, C sú nepravdivé, preto disjunkcie $B \vee C$, respektíve $C \vee B$ sú tiež nepravdivé.

$p(B)$	$p(C)$	$p(B \vee C)$	$p(C \vee B)$	$p((B \vee C) \Leftrightarrow (C \vee B))$
1	1	1	1	
1	0	1	1	
0	1	1	1	
0	0	0	0	

Ž: *Ostáva už len posledný stĺpec.*

U: Zisťujeme v ňom, či výroky $B \vee C$ a $C \vee B$ sú v ekvivalencii. Preto úplne stačí, keď si budeme všímať len tretí a štvrtý stĺpec. Zopakujme si najprv, kedy je ekvivalencia pravdivá.

Ž: *Keď výroky na pravej aj ľavej strane obojstrannej šípky* $\Leftrightarrow$ *majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.*

U: Správne. Máme to zapísané modrou farbou v ďalšej tabuľke. Pozeraj sa na ňu. Teda keď sú oba výroky $B \vee C$ a $C \vee B$ buď naraz pravdivé, čo odpovedá prvým trom riadkom, alebo sú naraz nepravdivé. To je prípad posledného riadku.

Ž: *Jasné, takže v poslednom stĺpci sú samé jednotky.*

$p(B)$	$p(C)$	$p(B \vee C)$	$p(C \vee B)$	$p((B \vee C) \Leftrightarrow (C \vee B))$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	1

U: A presne to sme chceli ukázať. Čiže

výrok $(B \vee C) \Leftrightarrow (C \vee B)$ ***je tautológiou***.

U: Uveďme ešte zopár ďalších tautológii. Prezri si ich v tabuľke a povedz, či ti niečo nepripomínajú.

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$$

Ž: *Myslím, že hovoria o tom, ako sa negujú výroky:* $A \wedge B$, $A \vee B$ *a* $A \Rightarrow B$.

U: Presne tak. Ide o ***negáciu konjunkcie***, ***negáciu disjunkcie*** a ***negáciu implikácie***. Korektné dôkazy, že to naozaj sú tautológie, nájdeš medzi príkladmi. Ostáva nám ešte objasniť pojem ***kontradikcia***.

Ž: *Čo znamená to slovo?*

U: Je latinského pôvodu a môžeme ho preložiť ako „rozpor", „protirečenie".

Ž: *Teda kontradikciou bude taký výrok, ktorý si bude protirečiť.*

U: V podstate áno. Taký rozporuplný výrok môže znieť napríklad takto:

$$V_3 : \text{Prší a zároveň neprší.}$$

Ž: *Hm, ... buď prší, alebo neprší, no naraz to nejde.*

U: To teda nejde. Výrok V_3 vznikol spojením výroku

$$A : \text{Prší.}$$

a jeho negácie

$$\neg A : \text{Neprší.}$$

logickou spojkou „a zároveň". Takže kontradikciou je napríklad zložený výrok

$$A \wedge \neg A.$$

Ž: **Ten výrok nebude nikdy platiť.** *Nemôže predsa platiť pôvodný výrok aj jeho negácia zároveň.*

U: Vidíš, ako si pekne sám prišiel k definícii kontradikcie. Slovíčko „rozporuplný" v matematike nahradíme slovným spojením „nebude nikdy platiť", repektíve „jeho pravdivostná hodnota bude 0". Korektná definícia potom znie:

zložený výrok nazývame <u>kontradikciou</u> vtedy,

keď jeho pravdivostná hodnota je 0

bez ohľadu na pravdivostné hodnoty výrokov, z ktorých pozostáva.

Ž: *Potom kontradikciami môžu byť všetky tautológie, pred ktoré dáme spojku negácie.*

U: Výborne. V nasledujúcej tabuľke si môžeš prezrieť ďalšie príklady kontradikcií.

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$$

$$(A \Rightarrow \neg A) \wedge (\neg A \Rightarrow A)$$

Ž: *Tu už nevidím hneď na prvý pohľad, že uvedené zložené výroky sú kontradikciami.*

U: Opäť sa môžeme o tom presvedčiť korektným dôkazom využijúc tabuľku pravdivostných hodnôt.

Ž: *Bude to zrejme vyzerať rovnako, ako pri dôkaze tautológií. Akurát teraz budem musieť dostať v poslednom stĺpci samé nuly, nie jednotky.*

U: Správne. Dôkaz, že $A \wedge \neg A$ je kontradikciou si môžeš pozrieť v nasledujúcej tabuľke. Zvyšné dôkazy nájdeš medzi príkladmi.

$p(A)$	$p(\neg A)$	$p(A \wedge \neg A)$
1	0	0
0	1	0

Príklad 1: *Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt dokážte, že výrok*

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

je tautológiou.

U: Skôr, než začneme dokazovať, povedzme si, o čom daný výrok hovorí.

Ž: *Na ľavej strane ekvivalencie je negácia výroku $A \wedge B$ ...*

U: ...inými slovami: ***negácia konjunkcie***. No a na pravej strane je výrok $\neg A \vee \neg B$, ktorý ekvivalentne nahrádza spomínanú negáciu konjunkcie.

Ž: *Spomínam si, pomocou toho negujeme konjunkcie.*

U: Správne. Poďme už k samotnému dokazovaniu. Chceme ukázať, že pre všetky možnosti pravdivostných hodnôt výrokov A, B ...

Ž: *Tie sú štyri, nie? Buď sú oba výroky A, B pravdivé, alebo je A pravdivý, B nepravdivý, alebo naopak B pravdivý, A nepravdivý. Ostáva ešte, keď sú oba výroky nepravdivé.*

U: Presne tak. V nižšie uvedenej tabuľke odpovedajú prvým dvom stĺpcom (znázorneným červeno). No dokončme začatú myšlienku. Teda pre všetky štyri možnosti pravdivostných hodnôt výrokov A, B musí mať výrok

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

pravdivostnú hodnotu 1. V tabuľke je tento stĺpec zvýraznený červenou farbou.

Ž: *Poďme už postupne vypĺňať spomínanú tabuľku.*

U: Najprv si uvedomme, koľko tam bude stĺpcov a čo budú predstavovať. Prvé dva stĺpce sme už okomentovali. Tretí stĺpec bude odpovedať pravdivostnej hodnote konjunkcie výrokov A, B, teda výroku $A \wedge B$. Z neho ľahko určíme pravdivostné hodnoty negácie konjunkcie, teda výroku $\neg(A \wedge B)$. Ako sa dopracujeme k pravdivostným hodnotám výroku $(\neg A \vee \neg B)$?

Ž: *Najprv určíme pravdivostné hodnoty negácie výroku A, teda $p(\neg A)$, potom pravdivostnú hodnotu negácie výroku B, teda $p(\neg B)$.*

U: Áno. No a z dvoch stĺpcov zvýraznených modrou už ľahko vyplníme posledný stĺpec odpovedajúci pravdivostným hodnotám pôvodného výroku (označeného červeným písmenom V).

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \wedge B)$	$p(\neg(A \wedge B))$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A \vee \neg B)$	$p(V)$
1	1						
1	0						
0	1						
0	0						

U: Poďme vypĺňať tabuľku. Stĺpec, ktorý odpovedá $p(A \wedge B)$, nebude problém vyplniť.

Ž: *Výrok $A \wedge B$ je pravdivý len vtedy, keď sú pravdivé oba výroky A, B. Teda číslo 1 bude len v prvom riadku.*

U: No a v ďalšom stĺpci odpovedajúcom $p(\neg(A \wedge B))$ zameníme oproti predchádzajúcemu stĺpcu pravdivostné hodnoty: 1 za 0 a naopak.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \wedge B)$	$p(\neg(A \wedge B))$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A \vee \neg B)$	$p(V)$
1	1	1	0				
1	0	0	1				
0	1	0	1				
0	0	0	1				

U: Ako to bude so stĺpcom odpovedajúcim $p(\neg A)$?

Ž: *Tam, kde je v prvom stĺpci číslo 1, v tomto stĺpci bude 0, a naopak. Podobne to bude so stĺpcom $p(\neg B)$.*

U: Výrok $(\neg A \vee \neg B)$ bude pravdivý, keď aspoň jeden z výrokov $\neg A$, $\neg B$ bude pravdivý. Teda číslo 1 napíšeme do druhého, tretieho a štvrtého riadku.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \wedge B)$	$p(\neg(A \wedge B))$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A \vee \neg B)$	p(V)
1	1	1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	1	
0	1	0	1	1	0	1	
0	0	0	1	1	1	1	

Ž: *Ostáva posledný stĺpec.*

U: Ten ľahko vyplníme využijúc iba modro vyznačené stĺpce. Všimni si ich poriadne.

Ž: *Stĺpce odpovedajúce $p(\neg(A \wedge B))$ a $p(\neg A \vee \neg B)$ sú rovnaké.*

U: Stačí si ešte uvedomiť, kedy je ekvivalencia pravdivá, a môžeme vyplniť aj posledný stĺpec.

Ž: *Ekvivalencia je pravdivá vtedy, keď oba výroky na ľavej aj pravej strane spojky $\Leftrightarrow$ majú rovnakú pravdivostnú hodnotu. Teda buď sú oba pravdivé, alebo sú oba nepravdivé.*

U: Správne. Takže ak dáme oba výroky $\neg(A \wedge B)$, $\neg A \vee \neg B$ do ekvivalencie, dostaneme náš pôvodný výrok V:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B).$$

Teraz si ešte raz všimnime pravdivostné hodnoty výrokov $\neg(A \wedge B)$, $\neg A \vee \neg B$ (v tabuľke sú znázornené modrou farbou).

Ž: *V prvom riadku sú dve nuly, v druhom dve jednotky, v treťom dve jednotky a v štvrtom tiež dve jednotky. Skrátka, v každom riadku sú rovnaké pravdivostné hodnoty.*

U: Teda naša ekvivalencia je vždy pravdivá. Do posledného stĺpca môžeme všade napísať číslo 1. Tým sme dokázali, že pôvodný výrok V je tautológiou.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \wedge B)$	$p(\neg(A \wedge B))$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A \vee \neg B)$	$p(V)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Príklad 2: *Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt dokážte, že výrok*

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

je tautológiou.

U: Skôr, než začneme dokazovať, povedzme si, o čom daný výrok hovorí.

Ž: *Na ľavej strane ekvivalencie je negácia výroku $A \vee B$ ...*

U: ...inými slovami: ***negácia disjunkcie***. No a na pravej strane je výrok $\neg A \wedge \neg B$, ktorý ekvivalentne nahrádza spomínanú negáciu disjunkcie.

Ž: *Spomínam si, pomocou toho negujeme disjunkciu.*

U: Správne. Poďme už k samotnému dokazovaniu. Chceme ukázať, že pre všetky možnosti pravdivostných hodnôt výrokov A, B ...

Ž: *Tie sú štyri, nie? Buď sú oba výroky A, B pravdivé, alebo je A pravdivý, B nepravdivý, alebo naopak B pravdivý, A nepravdivý. Ostáva ešte, keď sú oba výroky nepravdivé.*

U: Presne tak. V nižšie uvedenej tabuľke odpovedajú prvým dvom stĺpcom (znázorneným červeno). No dokončme začatú myšlienku. Teda pre všetky štyri možnosti pravdivostných hodnôt výrokov A, B musí mať výrok

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

pravdivostnú hodnotu 1. V tabuľke je tento stĺpec zvýraznený červenou farbou.

Ž: *Poďme už postupne vypĺňať spomínanú tabuľku.*

U: Najprv si uvedomme, koľko tam bude stĺpcov a čo budú predstavovať. Prvé dva stĺpce sme už okomentovali. Tretí stĺpec bude odpovedať pravdivostnej hodnote disjunkcie výrokov A, B, teda výroku $A \vee B$. Z neho ľahko určíme pravdivostné hodnoty negácie disjunkcie, teda výroku $\neg(A \vee B)$. Ako sa dopracujeme k pravdivostným hodnotám výroku $(\neg A \wedge \neg B)$?

Ž: *Najprv určíme pravdivostné hodnoty negácie výroku A, teda $p(\neg A)$, potom pravdivostnú hodnotu negácie výroku B, teda $p(\neg B)$.*

U: Áno. No a z dvoch stĺpcov zvýraznených modrou už ľahko vyplníme posledný stĺpec odpovedajúci pravdivostným hodnotám pôvodného výroku (označeného červeným písmenom V).

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$	$p(\neg(A \vee B))$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A \wedge \neg B)$	$p(V)$
1	1						
1	0						
0	1						
0	0						

U: Pokračujme vo vypĺňaní tabuľku. Stĺpec, ktorý odpovedá $p(A \vee B)$, nebude problém vyplniť.

Ž: *Výrok $A \vee B$ je pravdivý vtedy, keď je pravdivý aspoň jeden z výrokov A, B. Teda číslo* 1 *bude v prvom, druhom aj treťom riadku.*

U: No a v ďalšom stĺpci odpovedajúcom $p(\neg(A \vee B))$ zameníme oproti predchádzajúcemu stĺpcu pravdivostné hodnoty: 1 za 0 a naopak.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$	$p(\neg(A \vee B))$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A \wedge \neg B)$	$p(V)$
1	1	1	0				
1	0	1	0				
0	1	1	0				
0	0	0	1				

U: Ako to bude so stĺpcom odpovedajúcim $p(\neg A)$?

Ž: *Tam, kde je v prvom stĺpci číslo* 1*, v tomto stĺpci bude* 0*, a naopak. Podobne to bude so stĺpcom $p(\neg B)$.*

U: Výrok $(\neg A \wedge \neg B)$ bude pravdivý len vtedy, keď oba výroky $\neg A$, $\neg B$ budú pravdivé. Teda číslo 1 napíšeme len do štvrtého riadku.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$	$p(\neg(A \vee B))$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A \wedge \neg B)$	$p(V)$
1	1	1	0	0	0	0	
1	0	1	0	0	1	0	
0	1	1	0	1	0	0	
0	0	0	1	1	1	1	

Ž: *Ostáva posledný stĺpec.*

U: Ten ľahko vyplníme využijúc iba modro vyznačené stĺpce. Všimni si ich poriadne.

Ž: *Stĺpce odpovedajúce $p(\neg(A \vee B))$ a $p(\neg A \vee \neg B)$ sú rovnaké.*

U: Takže ak dáme oba výroky $\neg(A \vee B)$, $\neg A \wedge \neg B$ do ekvivalencie, dostaneme náš pôvodný výrok V:

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B).$$

A ten bude vždy pravdivý. Preto do posledného stĺpca môžeme všade napísať číslo 1.

Ž: *Prečo?*

U: Už si povedal, že stĺpce sú rovnaké. Povedzme to ešte ináč. Ekvivalencia je pravdivá vtedy, keď oba výroky na ľavej aj pravej strane spojky $\Leftrightarrow$ majú rovnakú pravdivostnú hodnotu. Teda buď sú oba pravdivé, alebo sú oba nepravdivé.

Ž: *Jasné. V prvom riadku sú dve nuly, v druhom dve nuly, v treťom tiež dve nuly a v štvrtom dve jednotky.*

U: Správne. Tým sme dokázali, že pôvodný výrok V je tautológiou.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$	$p(\neg(A \vee B))$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A \wedge \neg B)$	$p(V)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Príklad 3: *Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt dokážte, že výrok*

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$$

je tautológiou.

U: Skôr, než začneme dokazovať, povedzme si, o čom daný výrok hovorí.

Ž: *Na ľavej strane ekvivalencie je negácia výroku $A \Rightarrow B$ ...*

U: ... inými slovami: ***negácia implikácie***. No a na pravej strane je výrok $A \wedge \neg B$, ktorý ekvivalentne nahrádza spomínanú negáciu implikácie.

Ž: *Spomínam si, pomocou toho negujeme implikáciu.*

U: Správne. Poďme už k samotnému dokazovaniu. Chceme ukázať, že pre všetky možnosti pravdivostných hodnôt výrokov A, B ...

Ž: *Tie sú štyri, nie?*

- *Buď sú oba výroky A, B pravdivé,*
- *alebo je A pravdivý, B nepravdivý,*
- *alebo naopak B pravdivý, A nepravdivý.*
- *Ostáva ešte, keď sú oba výroky nepravdivé.*

U: Presne tak. V nižšie uvedenej tabuľke odpovedajú prvým dvom stĺpcom (znázorneným červeno). No dokončme začatú myšlienku. Teda pre všetky štyri možnosti pravdivostných hodnôt výrokov A, B musí mať výrok

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$$

pravdivostnú hodnotu 1. V tabuľke je tento stĺpec zvýraznený červenou farbou.

Ž: *Poďme už postupne vypĺňať spomínanú tabuľku.*

U: Najprv si uvedomme, koľko tam bude stĺpcov a čo budú predstavovať. Prvé dva stĺpce sme už okomentovali. Tretí stĺpec bude odpovedať pravdivostnej hodnote implikácie výrokov A, B, teda výroku $A \Rightarrow B$. Z neho ľahko určíme pravdivostné hodnoty negácie implikácie, teda výroku $\neg(A \Rightarrow B)$. Ako sa dopracujeme k pravdivostným hodnotám výroku $(A \wedge \neg B)$?

Ž: *Pravdivostné hodnoty výroku A sú zapísané v prvom stĺpci. Potrebujem ešte určiť pravdivostné hodnoty negácie výroku B, teda $p(\neg B)$. No a ďalší stĺpec už môže odpovedať pravdivostným hodnotám výroku $(A \wedge \neg B)$.*

U: Áno. Potom pomocou dvoch stĺpcov zvýraznených modrou farbou ľahko vyplnime posledný stĺpec odpovedajúci pravdivostným hodnotám pôvodného výroku (označeného červeným písmenom V).

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(\neg(A \Rightarrow B))$	$p(\neg B)$	$p(A \wedge \neg B)$	$p(V)$
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

U: Pokračujme vo vypĺňaní tabuľky. Najprv stĺpec, ktorý odpovedá $p(A \Rightarrow B)$.

Ž: *Výrok $A \Rightarrow B$ je pravdivý vtedy, keď ...*

U: Radšej povedzme, kedy je nepravdivý.

Ž: *Nepamätám si. Bolo to také divné ...*

U: Nie je na tom nič nezvyčajné. Len sa treba opýtať: „Kedy je implikácia klamstvom, teda nepravdou?“ Je to iba vtedy, keď sa z pravdy dopracuješ ku nepravde. Preto nulu píšeme len do druhého riadku, kde je predpoklad implikácie pravdivý: $p(A) = 1$ a záver nepravdivý $p(B) = 0$.

Ž: *Vo všetkých ostatných riadkoch je číslo jedna? Aj keď z nepravdy vyplynie pravda?*

U: Áno. Z klamstva sa správnymi úvahami môžeš dopracovať k hocičomu: aj k pravde aj k nepravde.

Ž: *No dobre.*

U: V ďalšom stĺpci odpovedajúcom $p(\neg(A \Rightarrow B))$ zameníme oproti predchádzajúcemu stĺpcu pravdivostné hodnoty: 1 za 0 a naopak.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(\neg(A \Rightarrow B))$	$p(\neg B)$	$p(A \wedge \neg B)$	$p(V)$
1	1	1	0			
1	0	0	1			
0	1	1	0			
0	0	1	0			

U: Ako to bude so stĺpcom odpovedajúcim $p(\neg B)$?

Ž: *Tam, kde je v druhom stĺpci číslo 1, v tomto stĺpci bude 0, a naopak.*

U: Výrok $(A \wedge \neg B)$ bude pravdivý len vtedy, keď oba výroky A, $\neg B$ budú pravdivé. Teda číslo 1 napíšeme len do druhého riadku.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(\neg(A \Rightarrow B))$	$p(\neg B)$	$p(A \wedge \neg B)$	$p(V)$
1	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	1	1	
0	1	1	0	0	0	
0	0	1	0	1	0	

Ž: *Ostáva posledný stĺpec.*

U: Ten ľahko vyplnime využijúc iba modro vyznačené stĺpce. Všimni si ich poriadne.

Ž: **Stĺpce** *odpovedajúce* $p(\neg(A \Rightarrow B))$ *a* $p(A \wedge \neg B)$ **sú rovnaké**.

U: To nám vyhovuje. Takže ak dáme oba výroky $\neg(A \Rightarrow B)$, $A \wedge \neg B$ do ekvivalencie, dostaneme náš pôvodný výrok V:

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B).$$

A ten bude vždy pravdivý, lebo oba modré stĺpce majú v každom zo štyroch riadkov rovnaké pravdivostné hodnoty. Preto do posledného stĺpca môžeme všade napísať číslo 1.

Ž: *Prečo?*

U: Už sme to povedali. Povedzme to ešte ináč. Ekvivalencia je pravdivá vtedy, keď oba výroky na ľavej aj pravej strane spojky $\Leftrightarrow$ majú rovnakú pravdivostnú hodnotu. Teda buď sú oba pravdivé, alebo sú oba nepravdivé.

Ž: *Jasné. V prvom riadku sú dve nuly, v druhom dve jednotky, v treťom dve nuly a v štvrtom tiež dve nuly.*

U: Správne. Tým sme dokázali, že pôvodný výrok V je tautológiou.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(\neg(A \Rightarrow B))$	$p(\neg B)$	$p(A \wedge \neg B)$	$p(V)$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

Príklad 4: *Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt zistite, či výrok*

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$$

je tautológiou alebo kontradikciou.

Ž: *Mohli by sme si najprv pripomenúť, čo je to tautológia a čo kontradikcia?*

U: Samozrejme.

Tautológia je výrok, ktorý je ***vždy pravdivý***.

Kontradikcia je zase výrok, ktorý je ***vždy nepravdivý***.

Ž: *Takže ja mám zistiť, či náš výrok*

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$$

je vždy pravdivý, alebo vždy nepravdivý.

U: Ešte nemusí byť ani jedno, ani druhé.

Ž: *Jasné, niekedy môže byť pravdivý, inokedy nepravdivý.*

U: Presne tak, jeho pravdivosť môže závisieť od pravdivosti výrokov A, B. Skúsme teda zistiť, ako je to s tou závislosťou. Už zadanie nás nabáda, aby sme použili tabuľku pravdivostných hodnôt. Najprv si povedzme, aké bude mať stĺpce. Môžeš si pri tom všímať nižšie uvedenú tabuľku.

Ž: *V prvých dvoch stĺpcoch budú pravdivostné hodnoty výrokov A, B.*

U: Z toho musíme vychádzať. Čo ďalej? Ako sa postupne dopracujeme k nášmu výroku

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)?$$

Ž: *Potreboval by som tam ešte stĺpce s pravdivostnými hodnotami výrokov $A \vee B$ a $\neg A \wedge \neg B$.*

U: Výborne. Do tretieho stĺpca môžeme dať $p(A \vee B)$. No na to, aby sme poznali $p(\neg A \wedge \neg B)$, musíme ešte poznať $p(\neg A)$ a $p(\neg B)$. Preto do štvrtého stĺpca napíšeme $p(\neg A)$ a do piateho $p(\neg B)$.

Ž: *Takže do ďalšieho stĺpca už môžem napísať $p(\neg A \wedge \neg B)$.*

U: No a z červeného a modrého stĺpca sa už priamo dopracujeme k pravdivostným hodnotám nášho zadaného výroku

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B).$$

Potom do posledného stĺpca píšeme

$$p((A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)).$$

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A \wedge \neg B)$	$p((A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B))$

U: Tabuľka je pripravená, môžeme ju vypĺňať. Začnime počtom riadkov.

Ž: *To viem. Budú štyri, lebo sú štyri možnosti kombinácii pravdivostných hodnôt dvoch výrokov A, B.*

U: Správne. Ktoré sú to?

Ž:

- *Oba výroky A, B môžu byť pravdivé; do prvého riadku tabuľky píšem* 1, 1.
- *Výrok A je pravdivý, výrok B nepravdivý; do druhého riadku tabuľky píšem* 1, 0.
- *Výrok A je nepravdivý, výrok B pravdivý; do tretieho riadku tabuľky píšem* 0, 1.
- *Ešte oba výroky A, B môžu byť nepravdivé; do štvrtého riadku tabuľky píšem* 0, 0.

U: Veľmi pekne si to zdôvodnil. Prvé dva stĺpce tabuľky máme vyplnené. Ani tretí stĺpec nebude problém doplniť. Ten odpovedá pravdivostným hodnotám disjunkcie $A \vee B$.

Ž: *Výrok $A \vee B$ je pravdivý vtedy, keď*

- *je pravdivý výrok A,*
- *alebo je pravdivý výrok B,*
- *alebo môžu byť pravdivé oba výroky A, B.*

Preto v treťom stĺpci tabuľky píšem pravdivostnú hodnotu 1 *do prvého, druhého a tretieho riadku. Do štvrtého riadku píšem* 0.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A \wedge \neg B)$	$p((A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B))$
1	1	1				
1	0	1				
0	1	1				
0	0	0				

U: Pokračujme štvrtým stĺpcom. Negácia výroku A má opačné pravdivostné hodnoty ako výrok A. Preto tam, kde je v prvom stĺpci pravdivostná hodnota 1, do štvrtého stĺpca napíšem 0 a naopak.

Ž: *Rovnaké to bude s piatym stĺpcom, ktorý odpovedá pravdivostným hodnotám negácie výroku B. Tento stĺpec bude súvisieť s druhým stĺpcom.*

U: Teda v nižšie uvedenej tabuľke máme vyplnené aj stĺpce odpovedajúce $p(\neg A)$ a $p(\neg B)$. Z nich ľahko dostaname ďalší stĺpec, ktorý odpovedá pravdivostným hodnotám konjunkcie $\neg A \wedge \neg B$. Kedy bude táto konjunkcia pravdivá?

Ž: *Iba v jedinom prípade. Keď budú pravdivé oba výroky $\neg A$ aj $\neg B$. Čiže pravdivostnú hodnotu* 1 *píšem len do posledného riadku.*

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A \wedge \neg B)$	$p((A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B))$
1	1	1	0	0	0	
1	0	1	0	1	0	
0	1	1	1	0	0	
0	0	0	1	1	1	

U: Ostáva nám vyplniť už len posledný stĺpec. Ten odpovedá pravdivostným hodnotám nášho pôvodného výroku

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B).$$

Ide o konjunkciu dvoch výrokov $A \vee B$ a $\neg A \wedge \neg B$. Preto pri jeho vypĺňaní budeme vychádzať z tretieho a šiesteho stĺpca, ktoré odpovedajú $p(A \vee B)$ a $p(\neg A \wedge \neg B)$. V nižšie uvedenej tabuľke sú zvýraznené modrou farbou.

Ž: *Áno, vidím. Keďže sú tieto dva výroky spojené spojkou „a zároveň", k tomu, aby bol výrok pravdivý, musia byť oba výroky pravdivé. V prvých troch riadkoch je výrok $A \vee B$ pravdivý a výrok $\neg A \wedge \neg B$ nepravdivý. Vo štvrtom riadku je to naopak: výrok $A \vee B$ je nepravdivý a výrok $\neg A \wedge \neg B$ pravdivý.*

U: Čiže nikdy nie sú oba výroky naraz pravdivé. Preto v poslednom stĺpci píšeme pravdivostnú hodnotu 0. Zvýraznili sme to červenou farbou. Odpovedz teda na pôvodnú otázku, či je výrok $(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$ tautológiou alebo kontradikciou.

Ž: *Je to* **kontradikcia**.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$	$p(\neg A)$	$p(\neg B)$	$p(\neg A \wedge \neg B)$	$p((A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B))$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0

U: Napriek tomu, že je úloha vyriešená, nedám ti ešte pokoj. Skúsme sa zamyslieť, čo vlastne náš výrok $(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$ hovorí.

Ž: *Netuším.*

U: Preformulujme ho do „ľudskejšej“ reči. Výrok

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$$

je pravdivý vtedy, keď

platí výrok A ***alebo výrok*** B a zároveň ***platia naraz obe negácie výrokov*** A**,** B.

Povedané ešte ináč:

Má platiť aspoň jeden z výrokov A**,** B a zároveň

nesmie platiť ani výrok A ***ani výrok*** B.

Je to možné?

Ž: *To teda nie je možné.*

U: Čiže náš pôvodný výrok nikdy neplatí, teda ***je to kontradikcia***.

Ž: *A my sme sa toľko natrápili s dokazovaním pomocou tabuľky ...*

Úloha 1: *Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt zistite, či výrok*

$$(A \Rightarrow \neg A) \wedge (\neg A \Rightarrow A)$$

je tautológiou alebo kontradikciou.

Výsledok: *kontradikcia*

Príklad 5: *Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt zistite, či výrok*

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$$

je tautológiou alebo kontradikciou.

U: Začnime tým, že si zopakujeme, čo je to tautológia a čo kontradikcia.

Ž: *To si pamätám.*

Tautológia *je výrok, ktorý je* **vždy pravdivý**.

Kontradikcia *je zase výrok, ktorý je* **vždy nepravdivý**.

U: Výborne. Poďme teda zistiť, či je výrok $(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$ vždy pravdivý alebo vždy nepravdivý. Zadanie nás nabáda, že to môžeme urobiť pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt. Preto si najprv povedzme, aké bude mať stĺpce. Všímajme si pri tom nižšie uvedenú tabuľku.

Ž: *Začneme pravdivostnými hodnotami výrokov A a B. Tie budú v prvých dvoch stĺpcoch. Ďalej vidím, že v pôvodnom výroku*

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$$

vystupuje aj negácia výroku A. Takže do tretieho stĺpca dám $p(\neg A)$.

U: Výborne. Náš výsledný výrok

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$$

je konjunkciou výrokov $A \vee B$ a $\neg A \Rightarrow B$. Preto štvrtý stĺpec bude odpovedať $p(A \vee B)$ a piaty $p(\neg A \Rightarrow B)$. No a z týchto dvoch stĺpcov sa už priamo dostaneme k pravdivostným hodnotám nášho zadaného výroku. Preto do posledného stĺpca píšeme

$$p((A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)).$$

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A)$	$p(A \vee B)$	$p(\neg A \Rightarrow B)$	$p((A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B))$

U: Počet riadkov tabuľky odpovedá počtu všetkých možných kombinácii pravdivostných hodnôt dvoch výrokov A, B. Koľko ich je?

Ž:

- *Oba výroky A, B môžu byť pravdivé; do prvého riadku nižšie uvedenej tabuľky píšem 1, 1.*
- *Výrok A je pravdivý, výrok B nepravdivý; do druhého riadku tabuľky píšem 1, 0.*
- *Výrok A je nepravdivý, výrok B pravdivý; do tretieho riadku tabuľky píšem 0, 1.*
- *Ešte oba výroky A, B môžu byť nepravdivé; do štvrtého riadku tabuľky píšem 0, 0.*

U: Správne. Dostali sme tak štyri riadky, v ktorých sme vyplnili prvé dva stĺpce. Vyplňme ešte tretí stĺpec.

Ž: *To nebude problém. Keďže odpovedá pravdivostným hodnotám negácie výrokov A, pravdivostné hodnoty v ňom budú opačné ako pravdivostné hodnoty v prvom stĺpci.*

U: Výborne.

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A)$	$p(A \vee B)$	$p(\neg A \Rightarrow B)$	$p((A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B))$
1	1	0			
1	0	0			
0	1	1			
0	0	1			

U: Štvrtý stĺpec odpovedajúci $p(A \vee B)$ dostaneme z prvých dvoch stĺpcov. Keďže disjunkcia je pravdivá vtedy, keď je pravdivý aspoň jeden z výrokov A, B, pravdivostnú hodnotu 1 píšeme do prvých troch riadkov. Do posledného riadku píšeme 0, lebo oba výroky A, B sú nepravdivé. V nižšie uvedenej tabuľke sú zvýraznené červenou farbou. Ako to bude s piatym stĺpcom?

Ž: *Ten sa týka implikácie $\neg A \Rightarrow B$. Implikácia je pravdivá ...*

U: Radšej povedzme, kedy je implikácia nepravdivá. Je to iba v jedinom prípade. A to vtedy, keď z pravdy dostaneme nepravdu.

Ž: *Vo všetkých ostatných prípadoch je implikácia pravdivá?*

U: Áno. Teda implikácia $\neg A \Rightarrow B$ je nepravdivá, keď je predpoklad pravdivý: $p(\neg A) = 1$ a záver je nepravdivý: $p(\neg B) = 0$. Ktorému riadku to odpovedá?

Ž: *Ak dobre pozerám, tak poslednému. Preto do posledného riadku piateho stĺpca píšem 0, v ostatných riadkoch bude pravdivostná hodnota 1.*

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A)$	$p(A \vee B)$	$p(\neg A \Rightarrow B)$	$p((A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B))$
1	1	0	1	1	
1	0	0	1	1	
0	1	1	1	1	
0	0	1	0	0	

U: Ostáva nám vyplniť posledný stĺpec. Ten odpovedá konjunkcii výrokov $A \vee B$ a $\neg A \Rightarrow B$, ktorých pravdivostné hodnoty sú v predchádzajúcich dvoch stĺpcoch. Kedy je konjunkcia pravdivá?

Ž: *Spojka „a zároveň" sama hovorí, že musia platiť oba výroky naraz.*

U: Platí to u nás?

Ž: *V prvých troch riadkoch áno, no v poslednom nie. Tam sú oba výroky $A \vee B$ a $\neg A \Rightarrow B$ nepravdivé. Teda aj ich konjunkcia je nepravdivá*

U: Výborne. Teda v poslednom stĺpci máme prvé tri pravdivostné hodnoty 1, posledná je 0.

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A)$	$p(A \vee B)$	$p(\neg A \Rightarrow B)$	$p((A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B))$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0

U: Odpovedzme na otázku zo zadania, či je pôvodný výrok tautológiou alebo kontradikciou.

Ž: *Hm, ... Výrok*

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$$

nie je vždy ani pravdivý ani nepravdivý. Teda to **nie je ani tautológia ani kontradikcia**.

U: Správne.

Úloha 1: *Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt zistite, či výrok*

$$\neg(A \vee B) \vee (B \Rightarrow \neg A)$$

je tautológiou alebo kontradikciou.

Výsledok: *nie je to ani tautológia ani kontradikcia*