Séria č.3

Reálne čísla, axiómy, ohraničenosť (maximá a minimá), princíp supréma a infima.

1) Dokážte, že $a < b$ práve vtedy, keď $-b < -a$.
2) Dokážte, že ak $a < b$ a zároveň $c < 0$, tak $bc < ac$.
3) Uvedomte si platnosť nasledujúcich tvrdení a ktoré neboli dokázané, dokážte:
   a) $ab > 0$ práve vtedy, keď $a > 0$ a $b > 0$ alebo $a < 0$ a $b < 0$.
   b) $ab < 0$ práve vtedy, keď $a > 0$ a $b < 0$ alebo $a < 0$ a $b > 0$.
   c) $\frac{a}{b} > 0$ práve vtedy, keď $a > 0$ a $b > 0$ alebo $a < 0$ a $b < 0$.
   d) $\frac{a}{b} < 0$ práve vtedy, keď $a > 0$ a $b < 0$ alebo $a < 0$ a $b > 0$.
4) Dokážte, že ak $a < b$ a zároveň $ab > 0$, tak $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
5) Ak $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $0 < b$, $0 < d$, tak

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

6) Definujme 2=1+1. Dokážte, že l<2 a O<l/2<l.
7) Dokážte, že ku každému číslu $a > 0$ existuje také číslo b, že $0 < b < a$. To znamená, že neexistuje najmenšie kladné číslo. (Návod: Využite cvičenie I.4.6.)
8) Dokážte, že ak $0 \leq a$ a pre každé $y > 0$ platí $a \leq y$, tak $a = 0$. (Návod: Využite cvičenie I.4.7)
9) Dokážte, že ak $a < b$, $c < d$, $0 < c$, tak $ac < bd$.
10) Dokážte niekoľko ďalších údajov v tabuľke sčítania.
11) Dokážte niektoré údaje v tabuľke násobenia.
12) Dokážte, že 28 + 31 = 59; 32 + 45 = 77.
13) Dokážte: 37 + 55 = 92; 37 + 29 = 66; 83 + 78 = 161.
14) Dokážte: 27 = 3.8 + 3; 47 = 6.7 + 5.
15) Dokážte, že rovnica $x + a = b$ má pre dané a, b práve jedno riešenie.
16) Dokážte, že riešenia rovníc $a + x = b$, $x + a = b$ sa zhodujú. Presnejšie: ak x je také číslo, že $a + x = b$ a y je také, že $y + a = b$, tak $x = y$.
17) Všimnite si, že pri dokazovaní vety I.A.1 sme vlastne dokázali toto tvrdenie: Ak existuje

také b, že $b + x = b$, tak pre každé a platí $a + x = a$.

18) Ukážte, že ak existuje také a, že $a + x = a$, a existuje také b, že $b + y = b$, tak $x = y$. (Návod: Použite cvičenie 27 a vetu I.A.3.)

19) Dokážte, že $b - a = d - c$ vtedy a len vtedy, keď $b + c = a + d$.

20) Dokážte, že $a - (a - b) = b$; $a - b = -b + a$; $-(a - b) = b - a$; $-a + b = -(a - b)$; $(a - b) - (c - b) = a - c$; $-(a + b) = -a - b$; $(a + b) - (c + b) = a - c$ pre ľubovoľné a, b, c.