Séria č.4

Reálne čísla, axiómy, ohraničenosť (maximá a minimá), princíp supréma a infima.

1) Uvažujme objekty □ a Δ. Definujme Δ + Δ = Δ, Δ + □ = □, □ + Δ = □, □ + □ = Δ. Všimnite si, že sú splnené pravidlá (1^+), (2^+), (3^+). Čo hrá rolu nuly? Ukážte, že odčítanie je komutatívne.

2) Riešte ten istý problém ako v cvičení 31 pre objekty Δ, ∇, * so sčítaním definovaným takto:
   Δ + Δ = ∇ + * = * + ∇ = Δ,
   Δ + ∇ = ∇ + Δ = * + * = ∇,
   Δ + * = * + Δ = ∇ + ∇ = *. Odčítanie nie je komutatívne.

3) Nech množinou čísel je { Δ, ∇, □, * }. Definujme sčítanie tabuľkou

+	Δ	∇	□	*
Δ	∇	Δ	*	□
∇	Δ	∇	□	*
□	*	□	∇	Δ
*	□	*	Δ	∇

(To znamená, že napríklad ∇ + □ = □,= Δ, atď.) Ukážte, že platia pravidlá (1^+), (2^+) a (3^+). Čo hrá rolu nuly? Ukážte, že $a + b = a - b$ pre každé "číslo" a a každé "číslo" b.

4) Nech množinou "čísel" je { Δ, ∇, □, * , ■ }. Definujme sčitovanie tabuľkou

+	Δ	∇	□	*	■
Δ	Δ	∇	□	*	■
∇	∇	□	*	■	Δ
□	□	*	■	Δ	∇
*	*	■	Δ	∇	□
■	■	Δ	∇	□	*

Ukážte, že platia zákony (1^+), (2^+) a (3^+). Čo je nula?

5) Nech množinou všetkých "čísel" je $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Definujme A + B = C, kde C je zvyšok po delení čísla A + B číslom 5, pre každé A = 0, 1, 2, 3, 4 a B = 0, 1, 2, 3, 4. Napíšte tabuľku takéhoto sčitovania. Ukážte, že platia pravidlá $((1^+)$, (2^+) a (3^+). "Nulou" je 0.

6) Ukážte, že pokiaľ ide o sčitovanie, cvičenia 34 a 35 udávajú "ten istý" príklad "čísel". Pokúste sa túto myšlienku vyjadriť presnejšie.

7) Nech $p > 1$ je celé číslo. Nech množinou všetkých "čísel" je $\{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$. Definujme $\overline{A} + \overline{B} = \overline{C}$, kde C je zvyšok po delení čísla A + B číslom p, pre všetky A, B $\in \{0, 1, \ldots, p - 1\}$. Overte (1^{+}), (2^{+}), (3^{+}).

8) Pre $p = 4$ dostaneme z cvičenia 37 "čísla" $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$. Napíšte tabuľku sčitovania, ako bolo definované v cvičení 37. Ukážte, že tento príklad nie je "ten istý" ako príklad z cvičenia 33.

9) Dokážte, že pre $a \neq 0$ má rovnica $ax = b$ práve jedno riešenie.

10) Ak $a \neq 0$, tak rovnica $ax = b$ má rovnaké riešenie ako $xa = b$.

11) Všimnite si, že pri dokazovaní vety I.A.9 sme dokázali, že ak $bx = b$, $b \neq 0$, tak $ax = a$ pre každé a.

12) Ukážte, že ak pre niektoré $a \neq 0$ platí $ax = a$ a pre niektoré $b \neq 0$ platí $by = b$, tak $x = y$. (Návod: Použite cvičenie 41 a vetu I. A. 10.)

13) Dokážte, že ak $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, tak $bc = ad$.

14) Definujme násobenie objektov Δ a d predpismi Δ□ = □Δ = □, ΔΔ = □□ = Δ. Overte platnosť výrokov $(1^{\cdot})$, $(2^{\cdot})$, $(3^{\cdot})$, (1^{+}), $(1^{:})$, $\binom{+}{\cdot}$. Čo hrá rolu jednotky?

15) Definujme násobenie "čísel" z cvičenia 33 tabuľkou

.	Δ	∇	□	*
Δ	Δ	∇	∇	Δ
∇	∇	∇	∇	∇
□	∇	∇	□	□
*	Δ	∇	□	*

Niektoré z pravidiel $(1^{\cdot})$, $(2^{\cdot})$, $(3^{\cdot})$ sú porušené. Ktoré a prečo?

16) Pre "čísla" $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ definujme násobenie $\overline{A}\overline{B} = \overline{C}$, kde C je zvyšok delenia čísla AB číslom 5, pre všetky A = 0, 1, 2, 3, 4 a B = 0, 1, 2, 3, 4. Zákony $(1^{\cdot})$, $(2^{\cdot})$ aj $(3^{\cdot})$ platia. Úlohu jednotky hrá $\overline{1}$.

17) Nech $p > 1$ je celé číslo. V množine čísel $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}\}$ definujme násobenie predpisom $\overline{A}\overline{B} = \overline{C}$, kde C je zvyšok delenia čísla AB číslom p pre A = 0, 1, 2, ... , $p - 1$ a B = 0, 1, 2, ... , p-1.

Ukážte, že platia zákony ($1^{\cdot}$), ($2^{\cdot}$). Ak $p = 7$, tak platí aj ($3^{\cdot}$). Ak $p = 12$, zákon ($3^{\cdot}$) neplatí.

18) Definujme sčitovanie objektov □, Δ, ∇ tak, že

$$\square + \square = \nabla + \Delta = \Delta + \nabla = \square,$$

$$\square + \nabla = \nabla + \square = \Delta + \Delta = \nabla,$$

$$\square + \Delta = \Delta + \square = \nabla + \nabla = \Delta$$

a násobenie predpismi

$$\square\,\square = \square\,\nabla = \nabla\,\square = \square\,\Delta = \Delta\,\square = \square,\ \nabla\,\nabla = \Delta\,\Delta = \nabla,\ \nabla\,\Delta = \Delta\,\nabla = \Delta.$$

Overte, že platí (1^{+}), (2^{+}), (3^{+}), ($1^{\cdot}$), ($2^{\cdot}$), ($3^{\cdot}$), $\binom{+}{\cdot}$. Čo je nula, čo je jednotka?

19) Pomocou viet I. A.23 a I. A.20 dokážte; že ak $a \neq 0$, $b \neq 0$, ,tak

$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc}{ac} + \frac{ad}{ac} = \frac{bc + ad}{ac}$$

Načo je potrebná veta I. A.20?

20) Dokážte, že ak $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, tak $\dfrac{d/c}{b/a} = \dfrac{ad}{bc}$