Séria č.5

Reálne čísla, axiómy, ohraničenosť (maximá a minimá), princíp supréma a infima.

1) Ak $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, tak $abc \neq 0$.
2) Ak v množine { Δ, ∇, □, * } je definované sčitovanie ako v cvičení 33 a násobenie ako v cvičení 45, tak platí distributívny zákon.
3) Ak v množine $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ je definované sčitovanie podľa cvičenia 11 a násobenie podľa cvičenia 46, tak platí distributívny zákon.
4) Keď pre ľubovoľné celé číslo $p > 1$ zavedieme sčitovanie ako v cvičení 37 a násobenie ako v cvičení 47, tak v množine uvažovaných "čísel" platí distributívny zákon.

Niektoré postupy na riešenie úloh, doplnenie na štvorec, kvadratický odhad, funkcie.

1) Ak $0 < a$, $0 < b$, tak a2 < b2 platí práve vtedy, keď $a < b$. Dokážte to.
2) Ak $0 < a$, tak $x^2 < a^2$ platí práve vtedy, keď $-a < x < a$.
3) Ak $0 < a$, tak $a^2 < x^2$ platí práve vtedy, keď buď $x < -a$ alebo $a < x$.
4) Dokážte:

   a) ak $a < b$, $b < -1$, tak $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$;

   b) ak $b < a$, $0 < b$, tak $\frac{a+1}{b+1} < \frac{a}{b}$;

   c) ak $b < a$, $b < -1$, tak $\frac{a+1}{b+1} < \frac{a}{b}$.

   Porovnajteto s príkladom 10.

5) Dokážte :

   a) ak $a \leq b$, $0 < b$, $0 < c$, tak $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

   b) Ak $b < a$, $0 < b$, $0 < c$, tak $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$.

   c) Ak $a < b$, $0 < c$, $b < -c$, tak $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

   d) Ak $b < a$, $0 < c$, $b < -c$, tak $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$.

6) Dokážte, že pre všetky $a > 0$, $b > 0$ platí nerovnosť $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Určte, pre ktoré čísla a, b platí rovnosť.

7) S príkladom 5 al ebo cvičením 6 súvisí veľa populárnych úloh. Uvedieme jednu z nich. V Poldávii sa stali problémom nečestní obchodníci. Mnohí z nich používali váhy s ramenami nerovnakej dĺžky. Vláda zvažovala, ktoré z možných opatrení má uskutočniť. Vytvorenie úradu inšpektora mier a váh, ktorý by to stíhal, sa zdalo drahé a neodolné voči korupcii. Preto ako predbežné opatrenie vydala vláda príkaz, že obchodník, ktorý zákazníkovi predáva dve kilá cukru, musí postupovať takto: Položí kilogramové závažie na ľavú misku váh a na pravú misku nasype cukor, až budú váhy v rovnováhe; obidve misky vyprázdni, položí kilogramové závažie na pravú misku a sype cukor na ľavú misku váh, kým nastane rovnováha. Obidve odvážené množstvá cukru spolu dá zákazníkovi a ten zaplatí za dva kilogramy. Na dodržiavanie postupu budú dohliadať sami zákazníci. Treba rozhodnúť, či je potrebné ešte nejaké ďalšie opatrenie. Odpoveď na túto otázku závisí samozrejme od toho, či uvedeným postupom dostane zákazník menej ako dva kilogramy, viac ako dva kilogramy, alebo presne dva kilogramy.

8) . Aritmetický priemer čísel a, b je číslo $\frac{(a+b)}{2}$. Harmonický priemer kladných čísel a, b je také číslo c, že $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Dokážte, že harmonický priemer kladných čísel a, b nie je väčší ako ich aritmetický priemer. Kedy sa rovnajú?

9) . Ak $a > 0$, $b > 0$, tak $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

10) Dokážte, že pre každé $a > 0$, $b > 0$ platí

a) $\frac{a}{3b} + \frac{3b}{4a} \geq 1$

b) $\frac{a+3b}{3b} \geq \frac{4a}{a+3b}$

11) Dokážte, že $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 6 \geq \frac{4a}{b} + \frac{4b}{a}$, pre všetky $a \neq 0$, $b \neq 0$. (Návod: $(a-b)^2$ $(a-b)^2 \geq 0$.)

12) Dokážte: ak $a > 0$, tak $\frac{x}{(a+x)^2} \leq \frac{1}{4a}$ pre všetky $x \neq -a$. Rovnosť platí len keď $x = a$.

13) Aký odpor má spotrebič (povedzme varič), ktorý ak je pripojený na zdroj elektrického napätia U s vnútorným odporom R, má maximálny príkon (dáva maximálne teplo za jednotku času)? (Návod: Cvičenie 12.)

14) Dokážte, že ak platí $a > 0$, $b > 0$ a $a + b = 1$, tak $ab \leq ¼$.

15) Dokážte, že ak $a > 1$, tak $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+a^2x} \leq \frac{a-1}{a+1}$, platí pre každé $x > -\frac{1}{a^2}$ a každé $x < -1$.

16) Dokážte, že ak $a > 0$, $b > 0$ a $a + b = 1$, tak $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9$. Kedy platí rovnosť?