

## Séria č.10

### Niektoré špeciálne funkcie.

- 1) Uvedomte si, že  $|x| + x = 0$  pre  $x \leq 0$  a  $|x| + x = 2x$  pre  $x \geq 0$ . Načrtnite graf funkcie  $x \rightarrow \frac{1}{2}(|x| + x)$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ .
- 2) Všimnite si, že  $|x| - x = -2x$ , pre  $x \leq 0$  a  $|x| - x = 0$  pre  $x \geq 0$ . Načrtnite graf funkcie  $x \rightarrow \frac{1}{2}(|x| - x)$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ .
- 3) Dokážte, že pre ľubovoľné čísla  $x, y$  platí  $||x| - |y|| = |x - y|$ .
- 4) Dokážte, že pre ľubovoľné čísla  $x, y, z$  platí  $|x + y + z| \leq |x + y| + |y| + |y + z|$ .  
Nájdite také čísla  $x, y, z$ , že  $|x + y| + |y + z| < |x + y + z|$ .
- 5) Nájdite všetky také čísla  $x$ , že platí
  - a)  $2|x| - 3|x + 2| + 3x + 4 = 0$ ;
  - b)  $2|x + 1| - 2|x + 4| - 3|x + 3| + 5x - 5 = 0$ ;
  - c)  $|x + 3| - \frac{1}{2}|x + 1| + \frac{3}{2}|x - 1| + x - 4 = 0$ .
- 6) Nájdite množinu všetkých čísel  $x$ , pre ktoré platí
  - a)  $2|x - 1| - 3|x + 1| + 3x + 1 < 0$ ;
  - b)  $|x + 2| + |x - 5| + 2x \geq |x|$ ;
  - c)  $|(x - 1)(x - 2)| \geq 3(x - 2)$ ;
  - d)  $2|(x + 1)(2 - x)| \geq 2 - x$ .
- 7) Nájdite množinu všetkých čísel  $x$ , pre ktoré
  - a)  $\frac{|2x + 3|}{|x - 1|} > 1$
  - b)  $\frac{|2x - 1| + 1}{12x + 8} < 13$
  - c)  $\frac{1}{|x + 1|} > \frac{1}{|x + 2|}$
  - d)  $\frac{1}{|x + 1|} > \frac{1}{x + 2}$
- 8) Ak  $h$  je taká kvadratická funkcia, že  $h(0) = 5$ ,  $h(1) = -3$ ,  $h(8) = 0$ , vypočítajte  $h(-2)$ . Čomu sa rovná  $h(5)$ ?
- 9) Všimnite si, že ak funkcia  $g$  je daná predpisom (5.3) a zároveň  $a > 0$ , tak  $t$  je najmenšia hodnota funkcie  $g$ . To znamená, že  $g(x) \geq t$  pre všetky  $x \in (-\infty, \infty)$ , a pritom existuje také  $x$ , že  $g(x) = t$ . Nájdite také  $x$ .  
Všimnite si tiež, že ak  $g$  je daná predpisom (5.3) a  $a < 0$ , tak  $t$  je najväčšia hodnota funkcie

g. V ktorom bode sa hodnota funkcie  $g$  rovná číslu  $t$ ?

- 10) V kontexte cvičenia 3 state II.2 nájdite funkciu, ktorá vyjadruje závislosť zisku výrobcu na úrovni výroby.
- 11) Nech  $f$  je afinná funkcia a nech  $g$  je kvadratická funkcia. Dokážte, že ak  $u \neq v$ ,  $v \neq w$ ,  $w \neq u$ , a pritom  $g(u) = f(u)$ ,  $g(v) = f(v)$  a  $g(w) = f(w)$ , tak  $g(x) = f(x)$  pre všetky  $x \in (-\infty, \infty)$ . (Návod: Podľa vety 2.3 a vzťahu (5.4) platí  $a = 0$  vo vyjadrení (5.2) funkcie  $g$ .)
- 12) Ak poznáte Pytagorovu vetu, ukážte, že bod  $P$ , ktorý spĺňa (5.1) pre  $a > 0$ , má rovnakú vzdialenosť od bodu  $F = (0, a/4)$  ako od priamky  $d = \{[x, y]: y = -a/4\}$ . (Návod: Ukážte, že druhé mocniny tých vzdialeností sú rovnaké.)
- 13) Podobne ako v cvičení 5 dokážte, že ak bod  $P = [x, y]$  má rovnakú vzdialenosť od bodu  $F$  ako od priamky  $d$ , tak  $y = ax^2$ .  
Výsledky cvičení 5 a 6 hovoria, že grafom kvadratickej formy (5.1) je množina všetkých tých bodov  $P$ , ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodu  $F$  ako od priamky  $d$ .
- 14) Ak 20 mužov vykoná určitú prácu za 5 dní, za aký čas ju vykoná 30 mužov?
- 15) Elektrický odpor drôtu určitej dĺžky z daného materiálu je nepriamo úmerný prierezu drôtu. Ak prierez drôtu je  $1/4 \text{ mm}^2$ , jeho odpor je  $2\Omega$ . Aký odpor bude mať drôt prierezu  $6/5 \text{ mm}^2$ ? Aký bude odpor drôtu s prierezom  $1/10 \text{ mm}^2$ ?
- 16) Elektrický prúd pretekajúci spotrebičom zapojeným na daný zdroj je nepriamo úmerný odporu spotrebiča. Ak odpor je  $150 \Omega$ , prúd je  $8/5 \text{ A}$ . Aký prúd potečie spotrebičom s odporom  $70 \Omega$ ?
- 17) Počet otáčok kolesa na určitej dráhe je nepriamo úmerný priemeru kolesa. Koleso priemeru  $80 \text{ cm}$  sa na určitej dráhe otočí  $1280$  ráz. Aký počet otáčok vykoná na tej istej dráhe koleso priemeru  $120 \text{ cm}$ ?
- 18) Vlnová dĺžka je nepriamo úmerná frekvencii vlnenia. Zvuk frekvencie  $550 \text{ Hz}$  má vlnovú dĺžku  $2 \text{ cm}$ . Akú vlnovú dĺžku má hlboký tón  $240 \text{ Hz}$  a akú vysoký tón  $1270 \text{ Hz}$ ?
- 19) Nech  $g$  je lineárna lomená funkcia s hodnotami  $g(0) = 5$ ,  $g(1) = 1$ ,  $g(2) = 2$ . Vypočítajte  $g(3)$ ,  $g(-3)$ ,  $g(-2)$ . Čo je definičným oborom funkcie  $g$ ? Určte  $g(x)$  pre ľubovoľné  $x$  z definičného oboru funkcie  $g$ .
- 20) Dokážte, že pre žiadnu lineárnu lomenú funkciu  $g$ , ktorá nie je afinná, neplatí súčasne  $g(1) = 3$ ,  $g(-3) = 5$  a  $g(5) = 1$ .