

Séria č.9

Funkcia.

- 1) Načrtnite na obrázku graf množiny $\{(x, y): y \geq 2x, x \leq 0\}$ v súradnicovej sústave.
- 2) Načrtnite graf množiny $\{(x, y): \frac{x}{2} \leq 3x, -1 \leq y \leq 5\}$.
- 3) Načrtnite graf množiny $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4^2, y \leq \frac{x}{2}\}$. Načrtnite množiny $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4^2, y = \frac{x}{2}\}$.
- 4) Ak viete, že $(3, 4) \in \{(x, y): x^2 + y^2 = a\}$, čomu sa rovná a ?
- 5) Ak viete, že $(5, 7) \in \{(x, y): 3x^2 - 5mx + y^2 = 12\}$, čomu sa rovná m ?
- 6) Ktoré z nasledujúcich množín usporiadaných dvojíc predstavujú graf nejakej funkcie?
 - a) $\{(x, y): x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, \infty), x \neq y\}$
 - b) $\{(x, y): x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, \infty), x = y\}$
 - c) $\{(x, y): x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, \infty), x = y^2\}$
 - d) $\{(x, y): x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, \infty), x^2 = y\}$
 - e) $\{(x, y): x \in (-\infty, \infty), x + y + 2 = 0\}$
 - f) $\{(x, y): x \in (0, \infty), y \in (0, \infty), x = y^2\}$
 - g) $\{(x, y): x \in (-1, 1), y \in (-\infty, \infty), x^2 + y^2 = 1\}$
 - h) $\{(x, y): x \in (-1, 1), y \in (-1, 0), x^2 + y^2 = 1\}$

Niektoré špeciálne funkcie.

- 1) V každom z nasledujúcich problémov (prevzatých zo stredoškolskej učebnice) určte lineárnu funkciu (prípadne lineárne funkcie) v pozadí problému. Rozriešte každú úlohu (a oživte si šťastné spomienky z mladosti).
 - a) Pisárka napíše na stroji 252 slov. za 7 minút. Koľko slov napíše rovnakým tempom za 9 minút?
 - b) Mapa má mierku 1:100000. Akú skutočnú vzdialenosť v kilometroch predstavuje 64/10 cm na mape?
 - c) Drevený hranol $10\text{cm} \times 9\text{cm} \times 4\text{cm}$ váži $6/25$ kilogramov. Aká je hmotnosť jedného kubického metra toho istého dreva?

- d) Chovateľ dostal 3840 dolárov za vlnu od 350 oviec pri priemernej cene 98 centov za kilogram vlny. Nasledujúci rok mal 450 oviec, ale cena za kilogram vlny bola o 10 centov nižšia. Koľko dostal?
- e) Odhadlo sa, že 36 mužov, pracujúcich 44 hodín za týždeň, by dokončilo istú prácu za 35 dní. Keď sa rozhodlo, že pracovať sa bude len 40 hodín týždenne, zamestnali ešte 6 mužov. Ako dlho potrvá práca?
- f) Meď, zinok a cín tvoria zliatinu v pomere 11:3:2. Koľko medi a koľko zinku treba zliať so 40-kilogramovou tyčou cínu?
- g) Ak cena farby je \$3,60 za galón, natretie plota 70 yardov dlhého a 4 stopy vysokého stojí 24 dolárov. Koľko stojí natretie podobného plota dlhého 50 yardov a vysokého 5 stôp a 6 palcov farbou, ktorej cena je \$4,20 za galón? (1 stopa má 12 palcov)
- 2) Ak x je dĺžka v yardoch, označme $f(x)$ tú istú dĺžku v metroch. Funkcia f udáva prevod dĺžky meranej v yardoch na dĺžku vyjadrenú v metroch. Všimnite si, že je to lineárna funkcia. Aký význam má koeficient k v tejto funkcii?
- 3) Prevod výsledku merania nejakej veličiny z jednej jednotky na inú je vo väčšine prípadov lineárna funkcia. Uďte niekoľko príkladov.
- 4) Newtonov zákon hovorí, že sila pôsobiaca na teleso je úmerná ňou spôsobenému zrýchleniu. Koeficient úmernosti sa nazýva hmotnosť telesa.
- 5) Ak f je funkcia afinná v intervale $(-\infty, \infty)$ a taká, že $f(1/2) = -3$, $f(7) = 5$, vypočítajte $f(3)$, $f(0)$, $f(-15)$. Kvôli riešeniu takýchto úloh sa obyčajne neučíme naspamäť vzorec (2.3), ale radšej pri riešení sledujeme jeho dôkaz, pretože ten sa oveľa ľahšie zapamätá.
- 6) Prevod teploty v stupňoch Fahrenheita na stupne Celzia je afinná funkcia. Sformulujte toto tvrdenie presne a nájdite príslušnú funkciu.
- 7) Tlak určitého množstva ideálneho plynu uzavretého v nádrži daného objemu je úmerný absolútnej teplote. Koeficient úmernosti závisí od objemu nádrže a množstva plynu. Ak teplotu meriame v stupňoch Celzia (alebo v stupňoch Fahrenheita), tak funkcia, vyjadrujúca závislosť tlaku od teploty, je afinná.
- 8) Dopyt po určitom výrobku (na danom trhu) sa v jednoduchých modeloch považuje za závislý iba od ceny výrobku. Ak p je cena jednotky výrobku, tak (opäť v zjednodušenej situácii) dopyt je $q + kp$, kde q , k sú konštanty. Interpretujte reálny význam týchto konštánt.
- 9) Dĺžka kovovej tyče závisí od jej teploty. Ak prírastok dĺžky je úmerný prírastku teploty (to platí len približne, ale s veľkou presnosťou), tak dĺžka je daná afinnou funkciou

teploty. Koeficient teplotnej (lineárnej) rozťažnosti je predĺženie tyče jednotkovej dĺžky pri oteplení o 1 stupeň. Sformulujte to presnejšie a uďte vzorec pre príslušnú funkciu.

10) Elektrický odpor vodiča závisí od jeho teploty. S veľkou presnosťou možno túto závislosť vyjadriť afinnou funkciou, ak teplota sa nemení v príliš veľkom rozsahu. Sformulujte to presnejšie a definujte teplotný koeficient odporu.

11) Dokážte, že pre ľubovoľné čísla x, y, z platí nerovnosť $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$.

12) Dokážte, že ak a, b sú ľubovoľné čísla, tak $\frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ sa rovná väčšiemu z nich

a $\frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$ sa rovná menšiemu z nich.

13) Všimnite si, že $|x|$ je väčšie z čísel $x, -x$.

14) Načrtnite graf funkcie $x \rightarrow |x - 2|$, $x \in (-\infty, \infty)$. Načrtnite graf funkcie $x \rightarrow |x + 3|$, $x \in (-\infty, \infty)$.