Séria č. 13

Matematická indukcia.

1) Ktosi platil 143 centov za jablká a hrušky. Jedna hruška stojí 17 centov, jablko 15 centov. Koľko čoho kúpil?
2) Tri majáky vysielajú záblesky v intervaloch 24, 36 a 45 sekúnd. V jednom okamihu boli všetky 3 záblesky súčasne. Po akom čase sa to zopakuje?
3) Ak a je celé číslo a p prvočíslo, tak a, p sú nesúdeliteľné alebo p delí a.
4) Nech J je taká množina celých čísel, že
   (i) ak a, b patria do J, tak aj $a + b$ patrí do J a
   (ii) ak a patrí do J a b je celé číslo, tak ab patrí do J. Dokážte, že existuje také celé číslo d, že J pozostáva práve zo všetkých celočíselných násobkov čísla d. (Návod: Vezmite najmenší kladný prvok množiny J.)
5) Nech J je množina všetkých celočíselných násobkov celého čísla a. Dokážte, že

$$J_a \cap J_b = J_{\mathrm{nsn}\,(a,\,b)}$$

6) Dokážte, $J_{\mathrm{nsd}(a,\,b)} \supseteq J_a \cap J_b$

   Dokážte tiež, že ak $J_c \supseteq J_a \cap J_b$, tak $J_c \supseteq J_{\mathrm{nsd}\,(a,\,b)}$
7) Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 4$ je číslo $\dfrac{(n^2+12n+35)(n+12)}{6}$ prirodzené.
8) Dokážte,že každé celé číslo $n \geq 8$ sa dá písať v tvare $n = 3x + 5y$, kde x, y sú nezáporné celé čísla.
9) Dokážte, že každé celé číslo $n \geq 8$ sa dá písať v tvare $n = 3x + 5y$, kde x, y sú nezáporné celé čísla a $y \leq 2$.
10) Dokážte,že každé celé číslo $n \geq 8$ sa dá písať v tvare $n = 3x + 5y$, kde x, y sú nezáporné celé čísla a $x \leq 4$.
11) Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 12$ existujú nezáporné celé čísla x, y také, že $n = 3x + 7y$.
12) Dokážte, že v cvičení 2 možno nezáporné celé čísla x, y zvoliť tak, že $y \leq 2$. Dokážte, že ich možno zvoliť tiež tak, aby $x \leq 6$.
13) Dokážte, že každé celé číslo $n \geq 48$ možno vyjadriť v tvare $n = 5x + 13y$, kde x, y sú nezáporné celé čísla.
14) Dokážte, že na vyjadrenie z cvičenia 7 možno navyše klásť podmienku $y \leq 4$ alebo podmienku $x \leq 12$.

15) Každé celé číslo $n \geq 34$ sa dá písať v tvare $n = 6x + 10y + 15z$, pričom x, y, z sú vhodné celé nezáporné čísla.

16) Každé celé číslo $n \geq 140$ možno vyjadriť v tvare $n = 15x + 21y + 35z$, kde x, y, z sú nezáporné celé čísla.

Rekurzívne definície.

1) Navrhnite vzorec, ktorým vyjadríte každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ak jej prvé členy sú

   a) 1, 3, 5, 7, 9, ...;

   b) 1, 4, 7, 10, 13, ...;

   c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots;$

   d) 1, 4, 9, 16, 25, ...;

   e) $\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \frac{1}{4.5}, \ldots;$

   f) 4, 16, 36, 64, 100, 144, ... ;

   g) $-1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \ldots$;

   h) 3, 15, 35, 63, 99, ... ;

2) Existuje veľa postupností, ktorých prvé členy sú (1.1). Jednu z nich sme mali v príklade 1. Ale tie isté členy zo začiatku má aj postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ kde $b_n = \frac{1}{n} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ pre každé $n = 1, 2, \ldots$, aj postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $c_n = \frac{1}{n} - 3\chi_{(7,\infty)}(n)$, pre $n = 1, 2, \ldots$, alebo tiež postupnosť $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ kde $d_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\chi_{(6,\infty)}(n)$, pre všetky $n = 1,2,$. Vypočítajte b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7. Vypočítajte c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9. Vypočítajte d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8. Čomu sa rovná d_{88}?

3) Navrhnite navzájom rôzne postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby každá z nich mala prvé členy

   a) 1, 3, 5, 6, ... ;

   b) 1, 0, 2, 0, ... ;

   c) 2, 4, 6, 8, 10, ...

4) Napíšte niekoľko prvých členov postupnosti, ktorá je induktívne definovaná takto:

a) $a_1 = 1$; $a_{k+1} = 1 - \dfrac{1}{a_k}$, $k = 1, 2, ...$

b) $a_1 = 3$; $a_{k+1} = \dfrac{2a_k}{3 + a_k}$, $k = 1, 2, ...$

c) $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_{k+2} = a_k - a_{k+1}$, $k = 1, 2, ...$

d) $a_0 = 0$; $a_{k+1} = \dfrac{1}{1 + a_k^2}$, $k = 0, 1, 2, ...$

e) $a_0 = 1$; $a_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + a_k^2\right)$, $k = 0, 1, 2, ...$