Cvičenia

1. *Nech* $f(x) = x^3$ *pre každé* $x \in (-\infty, \infty)$. *Dokážte, že funkcia* f *je spojitá v každom bode* $a \in (-\infty, \infty)$.
2. *Nech* $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ *pre každé* $x \in (-\infty, \infty)$. *Dokážte, že funkcia* f *je spojitá v každom bode* $a \in (-\infty, \infty)$. *(Návod:* $f(x) = 3(x-1)^2 + 2$ *pre každé* $x \in (-\infty, \infty)$.*)*
3. *Nech* $f(x) = \sqrt{x}$ *pre každé* $x \geq 0$. *Dokážte, že funkcia* f *je spojitá v každom bode* $a \in (0, \infty)$.
4. *Detailne dokážte spojitosť sprava funkcie* $x \mapsto 1/x$, $x \neq 0$, *v každom bode* $a \neq 0$ *(pozri príklad 14.4.6).*
5. *Nech* $f(x) = [x]$ *pre každé* $x \in (-\infty, \infty)$. *Dokážte, že funkcia* f *je spojitá sprava v každom bode reálnej osi. V ktorých bodoch je spojitá?*

6. Nech $f(x) = (x+1)/(x-1)$ pre každé $x \neq 1$. Využite fakt, že funkcia f klesá na intervaloch $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$, a dokážte, že je spojitá v každom bode $a \neq 1$.
7. Nech $f(x) = x^4$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Dokážte, že funkcia f je spojitá v bode 0. Využite pri tom vetu 14.4.1, pričom zvoľte $g(x) = 0$ a $h(x) = x^2$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.
8. Nech $f(x) = x^6$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Dokážte, že funkcia f je spojitá v bode 0.
9. Nech n je prirodzené číslo a nech $f(x) = x^{2n}$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Dokážte, že funkcia f je spojitá v bode 0.
10. Nech $g(x) = 0$ pre $x \leq 0$ a nech $g(x) = 0$ pre $x \geq 0$. Nech $h(x) = 0$ pre $x \leq 0$ a nech $h(x) = x$ pre $x \geq 0$. Alebo, nech $g(x) = 1/2(x - |x|)$ a $h(x) = 1/2(x + |x|)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Dokážte, že funkcie g a h sú spojité v bode 0. Využite získané tvrdenie v kombinácii s vetou 14.4.1 a dokážte, že funkcia f, definovaná predpisom $f(x) = x^{2n+1}$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$, je spojitá v 0.
11. Nech $f(0) = 0$ a nech $f(x) = 1 - \sqrt{|x|}[1/\sqrt{|x|}]$ pre každé $x \neq 0$. Dokážte, že funkcia f je spojitá v bode 0. (Návod: Postupujte podobne ako v príklade 14.4.8.)
12. Nech $f(0) = 1$ a nech $f(x) = (-1)^{[1/x]}$ pre každé $x \neq 0$. Dokážte, že funkcia f nie je spojitá v bode 0. Načrtnite jej graf.
13. Nech $g(x) = f(-x)$ pre každý taký bod x, že $-x$ patrí do definičného oboru funkcie f. Potom platí, že funkcia f je spojitá sprava v bode a vtedy a len vtedy, keď funkcia g je spojitá zľava v bode $-a$. Funkcia f je spojitá zľava v bode a vtedy a len vtedy, keď funkcia g je spojitá sprava v bode $-a$.