Cvičenia

1. Ukážte, že pre ľubovoľné číslo x platí nerovnosť $|\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}| \le |x|$. Pomocou tejto nerovnosti dokážte, že funkcia $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$, je spojitá v bode 1.
2. Ukážte, že pre ľubovoľné čísla x a a platí $|\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+a^2}| \le |x-a|$. Pomocou tejto nerovnosti dokážte, že funkcia $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$, je spojitá v každom bode a.
3. Ukážte, že pre ľubovoľné čísla x platí nerovnosť $|\sqrt{1+4x^2}-\sqrt{5}| \le 2|x-1|$. Pomocou tejto nerovnosti dokážte, že funkcia $x \mapsto \sqrt{1+4x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$, je spojitá v bode 1.
4. Ukážte, že funkcia $x \to \sqrt{1+4x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$, je spojitá v každom bode a.
5. Ukážte, že neexistuje také číslo L, že $\sqrt{|x|} \le L|x|$ pre každé x z nejakého okolia bodu 0 (pozri príklad 14.5.6). (Návod: Ak $g(x) = \sqrt{|x|}/|x|$ pre každé $x \ne 0$, tak funkcia g nie je ohraničená na intervale $(0, \delta)$, ani na intervale $(-\delta, 0)$ pre žiadne $\delta > 0$.)
6. Vo vetách tejto state nám záležalo len na „malých“ číslach ε. Môžeme napríklad ignorovať čísla väčšie ako 1. Na ukážku dokážte: Funkcia f je spojitá v bode a vtedy a len vtedy, keď pre každé kladné číslo $\varepsilon \le 1$ existuje také kladné číslo δ, že nerovnosť (14.2) platí pre každé x, spĺňajúce nerovnosť (14.3).
7. Podrobne preštudujte vetu 14.5.3. Potom ukážte, že funkcia f je ohraničená na intervale $\langle a, \infty)$ vtedy a len vtedy, keď existuje také $\varepsilon > 0$, že pre každé $\delta > 0$ a každé x, spĺňajúce nerovnosti $a \le x < a + \delta$, platí podmienka (14.2).
   Uveďte príklad takej funkcie f a bodu a, že funkcia f je ohraničená na intervale $\langle a, \infty)$, ale v bode a nie je spojitá sprava.
8. Nech f je funkcia a nech a je taký bod, že pre každé $\varepsilon > 0$ a každé $\delta > 0$ existuje také číslo x, že $a < x < a + \delta$, pričom je splnená podmienka (14.2). Rozhodnite, či je funkcia f s touto vlastnosťou spojitá sprava v bode a. (Návod: Nech $a = 0$

a nech f je taká funkcia, že $f(n^{-1}) = 1$ pre každé prirodzené číslo n a $f(x) = 0$, ak $xn \neq 1$, pre každé prirodzené číslo n.)

9. *Nech a je číslo a nech f je funkcia. Predpokladajme, že pre každé $\varepsilon > 0$, každé $\delta > 0$ a každé také x, že $a \leq x < a + \delta$, sú splnené nerovnosti (14.2). Ukážte, že $f(x) = f(a)$ pre každé $x \geq a$.*
10. *Hovoríme (len v tejto úlohe), že funkcia f je v bode a roztopašná sprava, ak existuje také $\varepsilon > 0$, že pre každé $\delta > 0$ existuje také $x \in \langle a, a + \delta)$, že platí (14.2).*

    a) *Nájdite takú funkciu f a číslo a, že funkcia f je roztopašná sprava v bode a.*

    b) *Nájdite takú funkciu f a číslo a, že funkcia f nie je roztopašná sprava v bode a.*

    c) *Nájdite takú funkciu f a číslo a, že funkcia f je roztopašná sprava v bode a, ale nie je v bode a spojitá sprava.*

    d) *Ukážte, že ak je funkcia f v bode a spojitá sprava, potom je v bode a roztopašná sprava.*

11. *Hovoríme (len v tejto úlohe), že funkcia f je v bode a rozjarená sprava, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$ a $x \in \langle a, a + \delta)$, že platí (14.2).*

    a) *Vyriešte prvé tri problémy z prechádzajúcej úlohy pre funkcie, ktoré sú rozjarené sprava.*

    b) *Dokážte, že ak existuje také $b > a$, že $f(b) > f(a)$, tak funkcia f je rozjarená sprava v bode a.*

12. *Ktoré funkcie f a čísla a majú tú vlastnosť, že existujú $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ a zároveň $x \in \langle a, a + \delta)$, pre ktoré platí (14.2)?*
13. *V zmysle vety 14.5.3 povedzte, čo to znamená, že funkcia f nie je spojitá v bode a.*
14. *Vráťte sa k príkladu 14.5.4. Vzorec $\delta = 4\varepsilon/3$ nie je „posvätný“. Ak chceme ukázať, že funkcia f je spojitá v bode 1, podľa vety 14.5.4 stačí dokázať, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$, že z nerovnosti (14.5) vyplýva (14.4). Ukázali sme, že $\delta = 4\varepsilon/3$ túto vlastnosť má. Vyhovujúce číslo δ však môže byť aj vačšie, napríklad $\delta = 4(\sqrt{2}-1)\varepsilon$. Dokážte to. (Návod: Dokážte, že $|(1+x)/(1+x^2)| \leq 1/2(1+\sqrt{2})$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.)*