

Cvičenia

1. Nech $h(x) = x^4$ v každom bode $x \in (-\infty, \infty)$. Dokážte, že funkcia h je spojitá v každom bode $a \in (-\infty, \infty)$. (Návod: $h = g \circ f$, pričom $g(y) = y^2$ pre každé $y \in (-\infty, \infty)$ a $f(x) = x^2$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.)
2. Nech n je prirodzené číslo a nech $h(x) = x^{2^n}$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Dokážte, že funkcia h je spojitá v každom bode $a \in (-\infty, \infty)$. (Návod: Použite matematickú indukciu tak, že hlavný krok bude založený na vyjadrení $h = g \circ f$, pričom $g(y) = y^2$ pre $y \in (-\infty, \infty)$ a $f(x) = x^{2^{n-1}}$, $x \in (-\infty, \infty)$.)
3. Nech $\beta \neq 0$ a q sú čísla, a nech $h(x) = 1/(\beta x + q)$ pre každé $x \neq -q/\beta$. Dokážte, že funkcia h je spojitá v každom bode $a \neq -q/\beta$.
4. Nech $h(x) = [1/x]$ pre každé $x \neq 0$. Nájdite všetky body, v ktorých je funkcia h spojitá sprava a všetky body, v ktorých je spojitá zľava.
5. Nech a, b, c sú čísla. Nech $f(x) = ax^2 + bx + c$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Dokážte, že funkcia f je spojitá v každom bode intervalu $(-\infty, \infty)$. (Návod: Funkčný predpis doplňte na štvorec a dvakrát použite vetu 14.7.1. Využite spojitost' lineárnych funkcií a funkciu $x \mapsto x^2$, $x \in (-\infty, \infty)$.)
6. Dokážte, že lineárna lomená funkcia (pozri stať 5.6) je spojitá v každom bode svojho definičného oboru.
7. Podrobne dokážte všetky tvrdenia z príkladu 14.7.8. Osobitne, že funkcia f je spojitá v 0, funkcia g je spojitá sprava v 0, a že funkcia h nie je v bode 0 ani spojitá zľava, ani spojitá sprava.

8. Nech $a \neq 0$ a b sú čísla. Nech $f(x) = \sqrt{ax + b}$ pre každé také x , že $ax + b \geq 0$. Nájdite všetky body, v ktorých je funkcia f spojitá, spojitá sprava a spojitá zľava.
9. Nech funkcia f je spojitá (spojitá zľava, spojitá sprava) v bode a a nech platí $h(x) = \sqrt{1 + (f(x))^2}$ pre každé x z definičného oboru funkcie f . Dokážte, že funkcia h je spojitá (spojitá zľava, spojitá sprava) v bode a . (Návod: Využite riešenie druhej úlohy z cvičení state 14.5.)