

Cvičenia

1. *Podrobne ukážte, že funkcia f z príkladu 14.8.7 je v bode 1 spojitá sprava.*
2. *Dokážte, že ak funkcia f je spojitá (spojitá sprava, spojitá zľava) v bode a , tak je taká aj funkcia $x \mapsto (3f(x) - 1)/(2f^2(x) + 3)$.*
3. *Nech je funkcia f spojitá v bode a a nech $f(a) > 0$. Dokážte, že funkcia $x \mapsto f(x)/(\sqrt{f(x)} + 1)$ je tiež spojitá v bode a . Dokážte, že rovnako aj funkcia $x \mapsto (|f(x)| + x)/(\sqrt{f(x)} + x^2 + 1)$ je spojitá v bode a .*
4. *Nech x je identická funkcia na $(-\infty, \infty)$. Dokážte, že funkcia*

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + x} - 2x^5}{7x - 5} + x \right)^4 \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4x}}$$

je spojitá v každom bode svojho definičného oboru. Aká množina je jej definičným oborom?

5. Dokážte, že ak sú funkcie f a g spojité v bode a a platí $g(a) < f(a)$, tak existuje také okolie U bodu a , že platí $g(x) < f(x)$ pre každé $x \in U$. (Návod: Použite vetu 14.6.1 a príklad 14.8.1.)
6. Vyslovte a dokážte analógiu zadania predchádzajúcej úlohy pre funkcie spojité zľava a spojité sprava.
7. Dokážte, že existuje kladné číslo x , ktoré spĺňa nerovnosť

$$31\sqrt{x} + 3(1+x)^{73} - 2(1-x)^{15} < 2(1-x^{93}).$$

8. Dokážte, že existuje také číslo $d > 2$, že každé číslo $x \in \langle 2, d \rangle$ spĺňa nerovnosť

$$\frac{120(x-1)^{15} + 5(x-2)^{12}}{41(x-1)^2 + x^2 - x - 2} < 3.$$

9. Dokážte tvrdenie z príkladu 14.8.1 priamo, bez použitia vety 14.8.1, a to napodobnením dôkazu vety 14.8.2.
10. Dokážte vetu 14.8.1 priamo, bez použitia vety 14.7.1.
11. Podrobne skonštruujte dôkaz vety 14.8.3 matematickou indukciou.
12. Nech funkcia f je spojitá v takom bode a , že $f(a) = 0$. Ak je funkcia g ohraničená v nejakom okolí bodu a , tak je funkcia fg spojitá v bode a (bez ohľadu na to, či je v tomto bode spojitá funkcia g). Dokážte!
13. Dokážte analógiu zadania predchádzajúcej úlohy pre funkcie spojité zľava a spojité sprava.