

Cvičenia

1. Nech $f(x) = 1/x$, ak x je iracionálne číslo a nech $f(x) = 0$, ak x je racionálne číslo. Dokážte, že neexistuje taký interval $(0, b)$, že funkcia f je na ňom ohraničená. Ukážte aj, že neexistuje nevlastná limita $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
2. Nech pre funkciu f platí $f(x) = 1/x$, ak existuje také prirodzené číslo n , že $1/(2n+1) < x < 1/(2n)$, a $f(x) = -1/x$, ak také prirodzené číslo n neexistuje a číslo x je kladné. Dokážte, že funkcia f nie je ohraničená na žiadnom intervale $(0, b)$ pre $b > 0$ a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ neexistuje dokonca ani ako nevlastná limita.
3. Dokážte, že $\lim_{x \rightarrow 0^+} |f(x)| = 0$, pričom f je funkcia z predchádzajúcej úlohy.
4. Nájdite interval (a, b) a takú funkciu f definovanú na (a, b) , že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} (1/f(x))$ neexistuje ani ako vlastná, ani ako nevlastná limita.
5. Ak je funkcia f monotónna na intervale (a, ∞) , tak $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existuje ako vlastná alebo nevlastná limita. Dokážte to.
6. Dokážte že, ak $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, tak existuje také číslo $d > a$, že $f(x) > 0$ pre každé $x \in (a, d)$.
7. Dokážte že, ak $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, tak existuje také číslo $d > a$, že $f(x) < 0$ pre každé $x \in (a, d)$.
8. Sformulujte a dokážte tvrdenia analogické k tvrdeniam z úloh 6, 7 pre prípady $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow a$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$.
9. Dokážte, že existuje také číslo x , že $0 < x < 1$ a platí
 - a) $x^{14} + 15x^5 - 265x\sqrt{x} + 25 < \frac{x^{18}+1}{2\sqrt{x-x}}$;
 - b) $50x^{11} + 3x - 7 > 50x^{10} + 104x^{27} - 104x^{27} - 104x^{28}$.
10. Dokážte, že $\lim f(x) = \infty$ vtedy a len vtedy, keď $\lim (f(x)/(1 + |f(x)|)) = 1$.
11. Dokážte, že rovnosť $\lim f(x) = -\infty$ je splnená vtedy a len vtedy, keď platí $\lim (f(x)/(1 + |f(x)|)) = -1$.
12. Nech φ je taká rastúca funkcia, že $\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi(y) = k$. Dokážte, že $\lim f(x) = \infty$ vtedy a len vtedy, keď $\lim \varphi(f(x)) = k$.
13. Nech φ je taká rastúca funkcia, že $\lim_{y \rightarrow -\infty} \varphi(y) = l$. Dokážte, že rovnosť $\lim f(x) = -\infty$ platí vtedy a len vtedy, keď $\lim \varphi(f(x)) = l$.